UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 12/09/2014

Nome: ______________________________

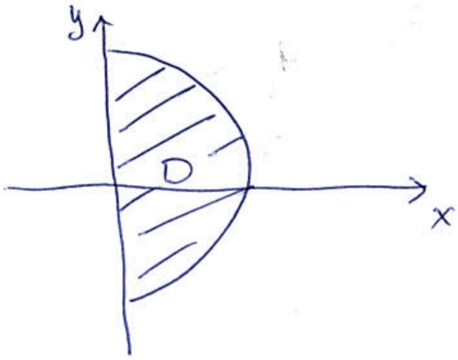
GRR: ______________ **Assinatura:** ______________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:

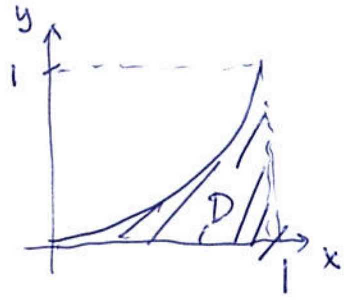
(a) **(1,5 ponto)** $\iint_D x\,dA$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$



$$\iint_D x\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \frac{2}{3}.$$

(b) **(1,5 ponto)** $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\,dy$ $= \int_0^1\int_0^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx$



$$= \int_0^1 e^{x^3} x^2\,dx$$

$$= \left.\frac{e^{x^3}}{3}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{3}.$$

Questão 2 Determine o volume de cada uma das regiões E abaixo:

(a) **(2 pontos)** E é delimitada pelo cone $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.

$$V = \iiint_E dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{4-x^2-y^2} dz\, dA$$

INTERSECÇÃO

$$\begin{cases} z = 3\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4 - r^2 = 3r$$

$$\Rightarrow r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow r = 1$$

ou $\cancel{r = -4}$

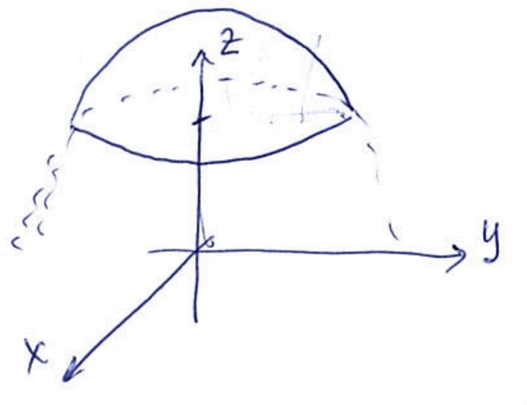
$$\therefore\ E: \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4 - x^2 - y^2 \\ (x,y) \in D:\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

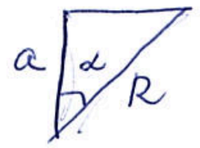
$$= \iint_D \left(4 - (x^2+y^2) - 3\sqrt{x^2+y^2}\right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4 - r^2 - 3r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 (4r - r^3 - 3r^2)\, dr = 2\pi \cdot \frac{17}{12} = \frac{17\pi}{6}.$$

(b) **(2 pontos)** E é a calota delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e pelo plano $z = a$, para $0 < a < R$.





$$\cos\alpha = a/R \Rightarrow \alpha \doteq \arccos(a/R)$$

$$\therefore\ E: \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \phi < \alpha \doteq \arccos(a/R) \\ \dfrac{a}{\cos\phi} \le r < R \end{cases}$$

$$z = a$$

$$r\cos\phi = a$$

EQ. DO PLANO $z=a$ em COORD. ESFÉRICAS $\boxed{r = a/\cos\phi}$

$$\therefore\ V = \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{a/\cos\phi}^{R} r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\phi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_{r=a/\cos\phi}^{r=R} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left\{R^3(1-\cos\alpha) - a^3\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi\right\} = \frac{2\pi}{3}\left(R^3 - \frac{3}{2}R^2 a + \frac{a^3}{2}\right).$$

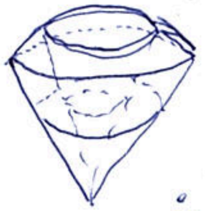
$u = \cos\phi$
$du = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$

Questão 3 Integrais triplas:

(a) **(2 pontos)** Calcule

$$\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV,$$

onde E é a região delimitada pelos cones $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera de centro na origem e raio 1.



$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \xrightarrow{\text{COORD. ESFÉRICAS}}\ \cos\phi=\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi=\pi/4$$

$$z=\sqrt{3x^2+3y^2}\ \xrightarrow{\text{COORD. ESFÉRICAS}}\ \cos\phi=\sqrt{3}\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi=\pi/6$$

$$\therefore\ E:\ \begin{array}{l} 0\leq\theta<2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ \pi/6\leq\phi\leq\pi/4 \end{array}$$

$$\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^1 e^{r^3} r^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^1 e^{r^3} r^2\,dr\cdot\int_{\pi/6}^{\pi/4}\operatorname{sen}\phi\,d\phi$$

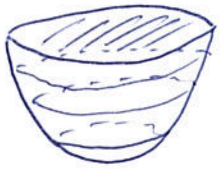
$$= 2\pi\cdot\frac{e-1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi(e-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3}.$$

(b) **(3 pontos)** Determine a massa e o centro de massa do sólido E que ocupa a região

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 1\}$$

e tem densidade no ponto (x,y,z) dada por $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\underline{D:\ x^2+y^2\leq 1}$



$$m=\iiint_E\sqrt{x^2+y^2}\,dV=\iint_D\left\{\int_{x^2+y^2}^{1}dz\right\}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)r\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{4\pi}{15}\ u.m.$$

$\underline{\text{CENTRO DE MASSA}}$ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$: $\bar{x}=\dfrac{1}{m}\displaystyle\iiint_E x\sqrt{x^2+y^2}\,dV=0$, POR SIMETRIA.

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\iiint_E y\sqrt{x^2+y^2}\,dV=0$$

$$m\bar{z}=\iiint_E z\sqrt{x^2+y^2}\,dV=\iint_D\left\{\int_{x^2+y^2}^{1}z\,dz\right\}\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(1-(x^2+y^2)^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^4) r^2 \, dr \, d\theta$$

$$= \pi \int_0^1 (r^2 - r^6) \, dr$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{4\pi}{21}$$

$$\therefore \quad \bar{z} = \frac{4\pi/21}{4\pi/15} = \frac{5}{7} .$$

LOGO, O CENTRO DE MASSA TEM COORDENADAS

$$(0, 0, 5/7) .$$