UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 17/10/2014

Nome: ______________________________

GRR: ______________ Assinatura: ______________

ATENÇÃO!

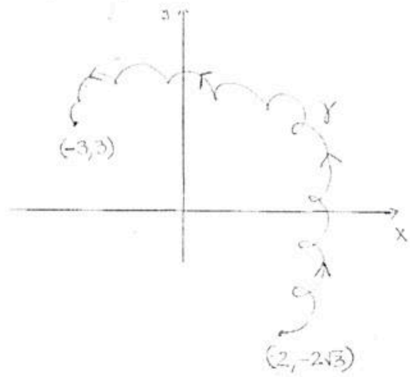
1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

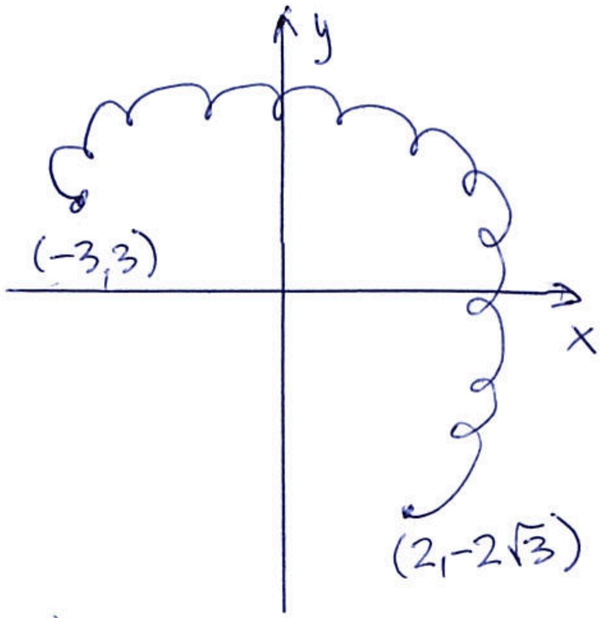
Questão 1 Determine o valor de

$$I = \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

para as curvas γ cujo traço está descrito abaixo:

(a) **(0.5 ponto)**

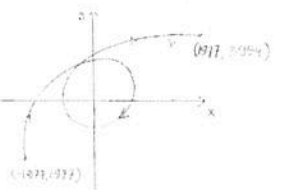


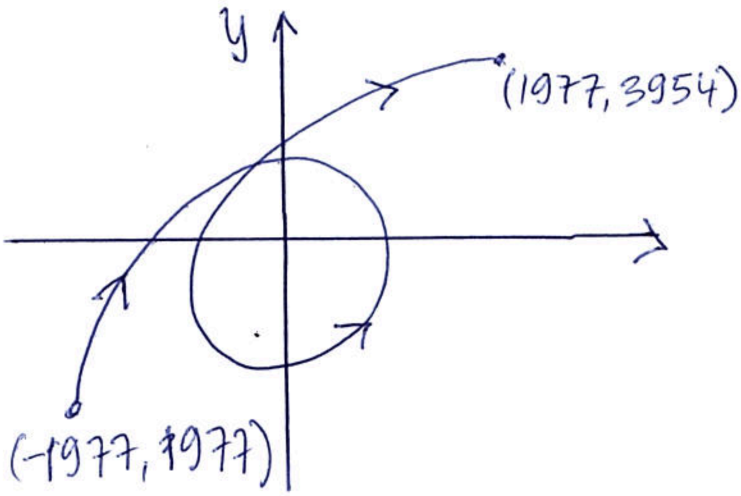


$$I = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{-3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{13\pi}{12}$$

(b) **(0.5 ponto)**

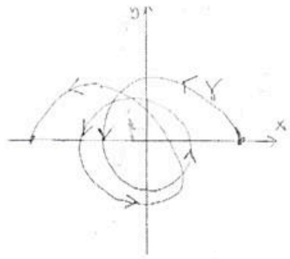




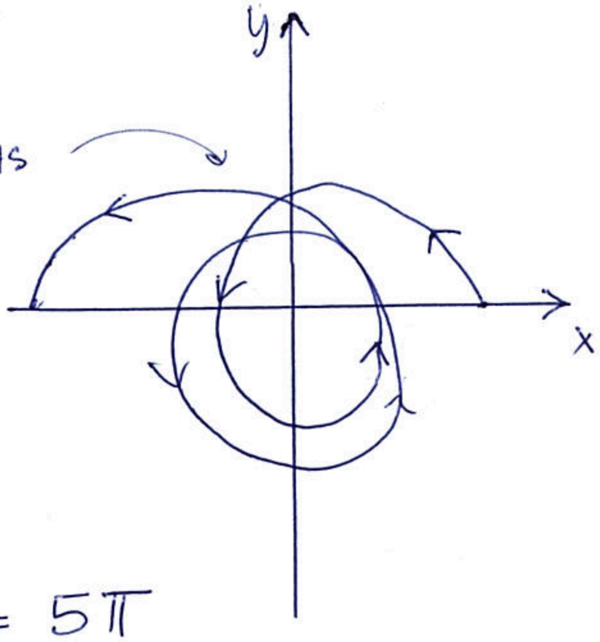
$$I = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{3954}{1977}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1977}{-1977}\right)$$

$$= 2\pi + \operatorname{arctg} 2 - \frac{5\pi}{4}$$

(c) **(1 ponto)**



2 VOLTAS



$$I = 2 \cdot 2\pi + \pi = 5\pi$$

Questão 2 Verifique se os campos de vetores abaixo, definidos no domínio D indicado, são conservativos. Caso o campo seja conservativo, exiba um potencial para o mesmo.

(a) **(2 pontos)** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0,0)\}$, $\vec{F}(x, y) = \left(\underbrace{\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{P}, \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{Q} \right)$

NÃO EXISTE POTENCIAL, POIS $Q_x = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ E

$$P_y = \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \therefore \quad Q_x \neq P_y.$$

(b) **(2 pontos)** $D = \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = \left(xe^x + y\cos x, \cos^2 y + \operatorname{sen} x\right)$

$$\begin{cases} f_x = xe^x + y\cos x \\ f_y = \cos^2 y + \operatorname{sen} x \end{cases} \longrightarrow \quad f(x,y) = y \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\left(y + \frac{\operatorname{sen} 2y}{2}\right) + g(x)$$

$$\therefore \quad g'(x) = xe^x \longrightarrow \quad g(x) = \int xe^x \, dx = (x-1)e^x$$

LOGO,

$$f(x,y) = y \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\left(y + \frac{\operatorname{sen} 2y}{2}\right) + (x-1)e^x$$

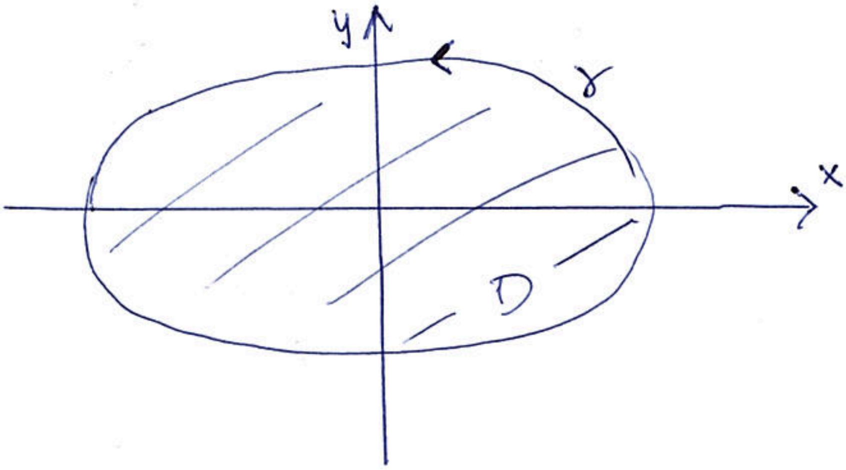
É UM POTENCIAL P/ $\vec{F}$.

Questão 3 Calcule as integrais de linha abaixo:

(a) **(2 pontos)**

$$\int_\gamma \underbrace{\left\{\operatorname{sen}(e^{x^2}-x^3)-x^2y^3\right\}}_{P} dx + \overbrace{\left\{\ln(1+4y^4)-\cos(7y^3)+x^3y^2\right\}}^{Q} dy$$

onde γ é a fronteira da região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+16y^2 \le 1\}$ orientada no sentido anti-horário.



TEO. GREEN

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2\right) dA$$

$$= 6\iint_D x^2y^2\, dA = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} r\cos\theta\right)^2 \left(\frac{1}{4} r \operatorname{sen}\theta\right)^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} r\, dr\, d\theta$$

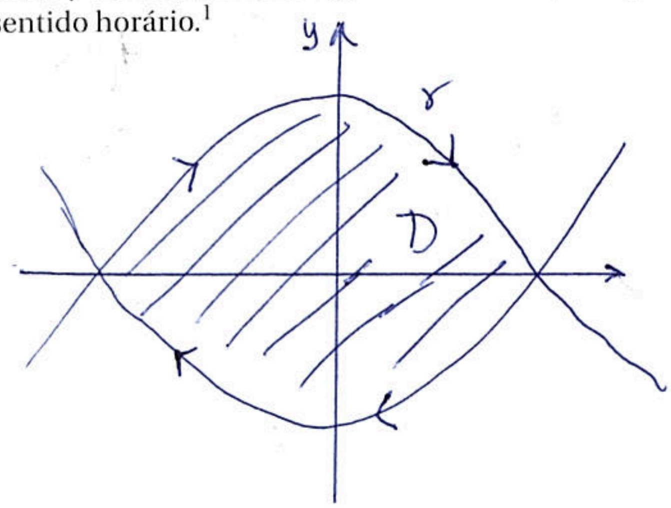
$$= \frac{3}{256}\int_0^1 r^5\, dr \cdot \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{1536}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{6144}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{3\pi}{6144}.$$

(b) **(2 pontos)**

$$\int_\gamma \overbrace{\left\{\frac{-y}{x^2+y^2}+4^{x^3}+x^2y\right\}}^{P} dx + \overbrace{\left\{\frac{x}{x^2+y^2}+\operatorname{sen}\left(y-e^{3y^2}\right)\right\}}^{Q} dy$$

onde γ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$ orientada no sentido horário.[1]



$$\int_\gamma P dx + Q dy = \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + \int_\gamma (4^{x^3}+x^2y) dx + \operatorname{sen}(y-e^{3y^2}) dy$$

ORIENTAÇÃO HORÁRIA!

$$= -2\pi - \iint_D (0 - x^2) \, dA$$

$$= -2\pi + 4 \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x^2 \, dy \, dx = -2\pi + 4 \int_0^1 x^2(1-x^2) \, dx$$

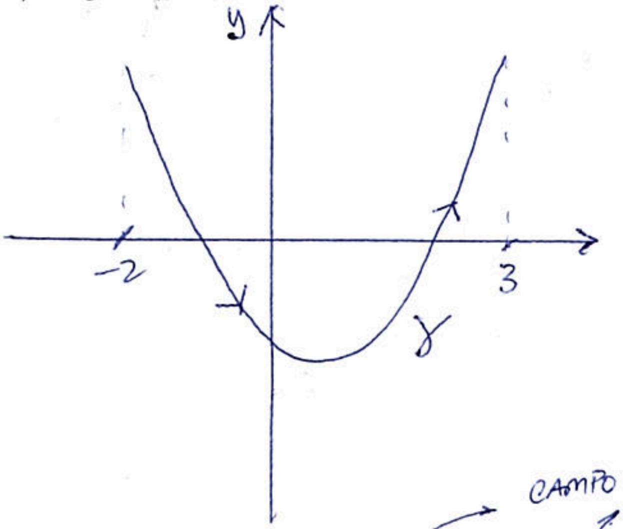
$$= -2\pi + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = -2\pi + \frac{8}{15} = \frac{-30\pi + 8}{15}.$$

[1] Cuidado! O Teorema de Green *não pode* ser aplicado diretamente, pois o campo tem uma singularidade na origem!!

Questão 4 (2 pontos) Determine

$$\int_\gamma \underbrace{\{ye^{xy} - xy\}}_{P}\,dx + \underbrace{\{xe^{xy} + x^2\}}_{Q}\,dy$$

onde γ é a parábola $y = x^2 - x - 2$, com $-2 \le x \le 3$, percorrida de $(-2,4)$ a $(3,4)$.



CAMPO CONSERVATIVO

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy + \int_\gamma -xy\,dx + x^2\,dy$$

$$= e^{xy}\Big|_{(-2,4)}^{(3,4)} + \int_{-2}^{3} \{-x(x^2-x-2) + x^2(2x-1)\}\,dx$$

$$= e^{12} - e^{-8} + \int_{-2}^{3} (x^3 + 2x)\,dx$$

$$= e^{12} - e^{-8} + \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_{-2}^{3} = e^{12} - e^{-8} + \frac{81}{4} + 9 - 4 - 4$$

$$= e^{12} - e^{-8} + \frac{85}{4}$$