UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 21/11/2014

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ____________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 (2 pontos) Dado $R > 0$, calcule

$$\iint_{S_R} \Big(\underbrace{2x^3\cos(z-2y)}_{f_1} \underbrace{- 6y^5(1+z)e^{\operatorname{sen}(x^2-4)}}_{f_2} + \underbrace{3z\operatorname{sen}(x^6+y^6)}_{f_3} + \underbrace{z^4}_{\star}\Big)\, dS$$

onde S_R denota a esfera de centro na origem e raio $R > 0$.

$f_1(-x,y,z) = -f_1(x,y,z) \quad \therefore \quad \iint_{S_R} f_1\, dS = 0$, POR SIMETRIA.

$f_2(x,-y,z) = -f_2(x,y,z) \quad \therefore \quad \iint_{S_R} f_2\, dS = 0$, POR SIMETRIA.

$f_3(x,y,-z) = -f_3(x,y,z) \quad \therefore \quad \iint_{S_R} f_3\, dS = 0$, POR SIMETRIA.

$$\star \quad \iint_{S_R} z^4\, dS = R \iint_{S_R} \overbrace{(0,0,z^3)}^{\vec{F}} \cdot \overbrace{\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}, \tfrac{z}{R}\right)}^{\vec{N}}\, dS$$

$$= R \iiint_{B_R} 3z^2\, dV$$, PELO TEO. DE GAUSS.

COMO $\iiint_{B_R} x^2\, dV = \iiint_{B_R} y^2\, dV = \iiint_{B_R} z^2\, dV$, ENTÃO

$$\iiint_{B_R} z^2\, dV = \frac{1}{3} \iiint_{B_R} (x^2+y^2+z^2)\, dV = \frac{1}{3} \iiint_{B_R} r^2\, dV$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

LOGO, $\displaystyle\iint_{S_R} (f_1 + f_2 + f_3 + z^4)\, dS = \frac{4\pi R^5}{15} \cdot 3R = \frac{4\pi R^6}{5}.$

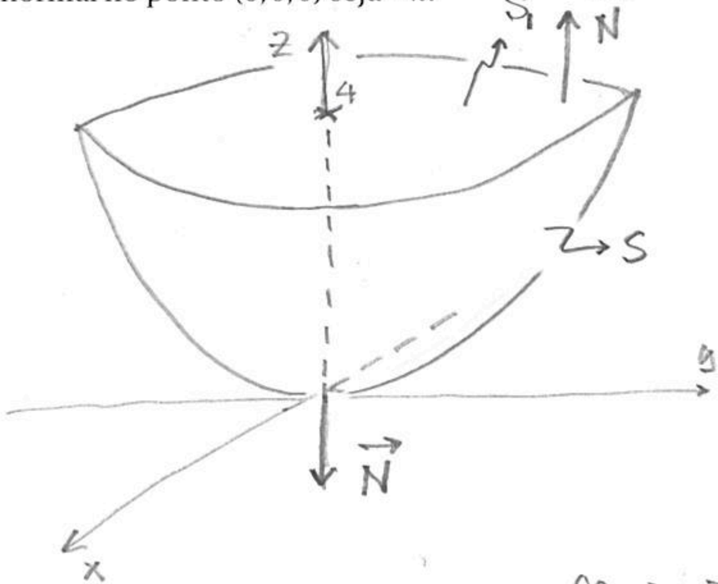
Questão 2 (2 pontos) Calcule

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

onde $\vec{F}$ é o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (\ln(2+y^4z^6)+xy^2)\vec{i} + (xz^4e^{-z^2}+\operatorname{sen}x)\vec{j} + (5x^5y^4+4x^2y^3+x^2z)\vec{k}$$

e S é a parte do parabolóide $z = x^2+y^2$ limitada pelo plano $z=4$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,0)$ seja $-\vec{k}$.



E: SÓLIDO DELIMITADO POR S E S_1.

$$\operatorname{div}\vec{F} = x^2+y^2$$

TEO. DA DIVERGÊNCIA

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \underbrace{\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{\circledast} = \underbrace{\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV}_{\circledast\circledast}$$

$$\circledast = \iint_{S_1} (\dots,\dots,5x^5y^4+4x^2y^3+4x^2)\cdot(0,0,1)\,dS = \iint_D (5x^5y^4+4x^2y^3+4x^2)\,dxdy$$

$D: x^2+y^2\leq 4$

POR SIMETRIA & IMPARIDADE

$$= 4\iint_D x^2\,dxdy = 4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta = 16\pi.$$

$$\circledast\circledast \quad \iiint_E (x^2+y^2)\,dV = \iint_D x^2+y^2\cdot\int_{x^2+y^2}^4 dz\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

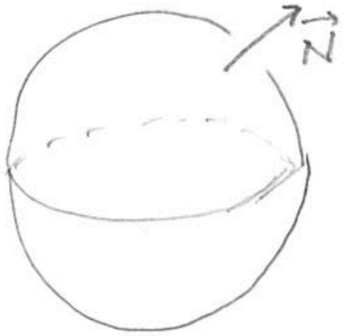
$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \frac{32\pi}{3} - 16\pi = -\frac{16\pi}{3}.$$

Questão 3 **(2 pontos)** Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy\,\text{sen}z)\vec{i} + (y^3 + \cos(xz))\vec{j} + (y\cos z)\vec{k}$$

em $\mathbb{R}^3$ e S a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada pela normal exterior. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

$$\text{div}\,\vec{F} = y\,\text{sen}\,z + 3y^2 - y\,\text{sen}\,z = 3y^2$$



E: REGIÃO INTERIOR A S

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV$$

$$= 3\iiint_E y^2\,dV$$

CALCULADO NA QUESTÃO 1

$$= 3\cdot\frac{4\pi\cdot 1^5}{15}$$

$$= \frac{4\pi}{5}.$$

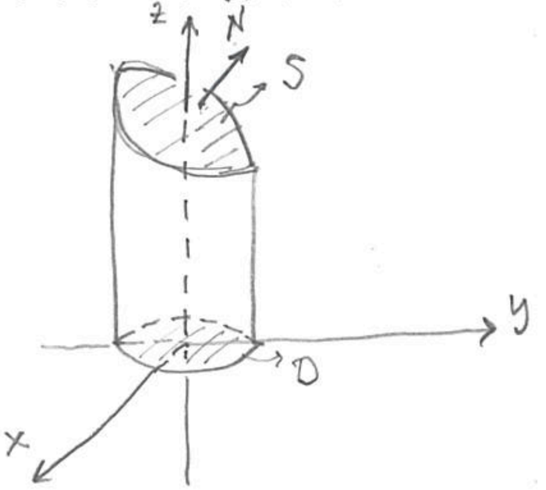
Questão 4 **(2 pontos)** Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}$ é o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2z + y + \ln(1+x^2))\vec{i} + (xy^2 + x + e^{y^3})\vec{j} + (z^2 - \cos(3z))\vec{k}$$

e γ a curva de intersecção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $x^2+y^2=4$ orientada de forma que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.



$\text{rot}\,\vec{F} = (0, x^2, y^2)$

S: GRÁFICO DE $f(u,v) = 1-u-v$,

$(u,v)\in D: u^2+v^2 \leq 4$

$\vec{n}(u,v) = (1,1,1)$

TEO. DE STOKES

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$= \iint_D (0, u^2, v^2)\cdot(1,1,1)\,du\,dv$$

$$= \iint_D (u^2+v^2)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2^4}{4}$$

$$= 8\pi.$$

Questão 5 **(2 pontos)** Calcule

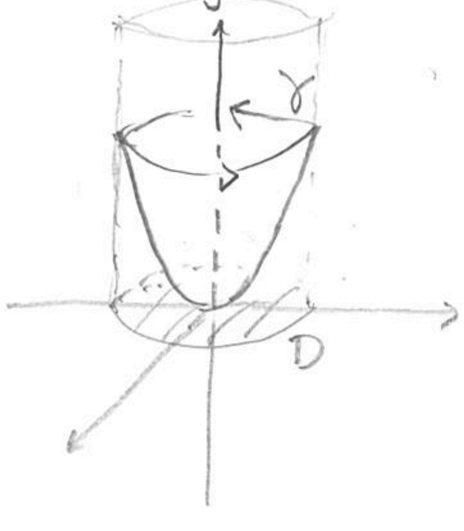
$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}$ é o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = ((1+x^2)^x + \ln(1+x^2))\vec{i} + (xy^2 + e^{3y^3})\vec{j} + (4z^6 - 6\cos(3z-1))\vec{k}$$

e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos^2 t + 3\operatorname{sen}^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

<u>IDENTIFICANDO γ</u>: γ PARAMETRIZA A INTERSECÇÃO DO CILINDRO $x^2+y^2=1$ COM O PARABOLÓIDE ELÍPTICO $z = 2x^2+2y^2$ DE FORMA QUE SUA PROJEÇÃO NO PLANO xy SEJA PERCORRIDA NO SENTIDO ANTI-HORÁRI



S: GRÁFICO DE $f(u,v) = 2u^2+3v^2$, $(u,v)\in D$: $u^2+v^2\le 1$ COM A NORMAL APONTANDO P/ <u>CIMA</u> (PARA QUE A REGRA DA MÃO DIREITA SEJA SATISFEITA)

$$\sigma(u,v) = (u, v, 2u^2+3v^2), \quad (u,v)\in D$$

$$\vec{n}(u,v) = (-4u, -6v, 1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,y^2)$$

$\therefore$ PELO TEO. DE STOKES, $\displaystyle\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS =$

$$= \iint_D (0,0,v^2)\cdot(-4u,-6v,1)\,du\,dv = \iint_D v^2\,du\,dv = \frac{\pi}{4}.$$