UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

PROVA SUBSTITUTIVA - 28/11/2014

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma$ nos casos abaixo:

(a) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}+y, \dfrac{x}{x^2+y^2}+x\right)$ e $\gamma(t) = (t^2+1, 3t^4+t^3-t^2-1)$, $-1 \le t \le 1$.

COMO A IMAGEM DE γ ESTÁ CONTIDA NO SEMIPLANO $D=\{x>0\}$ (POIS $x(t) = t^2+1 \geq 1$, $t\in\mathbb{R}$), A CURVA <u>NÃO</u> "DÁ VOLTAS" EM TORNO DA ORIGEM. EM D, O CAMPO $\vec{F}$ ADMITE O POTENCIAL $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + xy$ $\therefore$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = f(2,2) - f(2,0)$$
$$= (\operatorname{arctg}(1) + 2\cdot 2) - (\operatorname{arctg} 0 + 2\cdot 0)$$
$$= \pi/4 + 4$$

(b) **(2 pontos)** $\vec{F}(x,y,z) = (2^{3x^2}+\operatorname{sen}(x^3-x^2), xy^2+y^{2y}, 6z^5-7\cos(1-3z))$ e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos^2 t + 3\operatorname{sen}^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

γ PARAMETRIZA A INTERSECÇÃO $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 & \text{(CILINDRO)} \\ z = 2x^2+3y^2 & \text{(PARABOLÓIDE ELÍPTICO)} \end{cases}$

DE FORMA QUE A PROJ. EM Oxy É PERCORRIDA NO SENT. ANTI-HORÁRIO

<u>S</u>: $\sigma(u,v) = (u, v, 2u^2+3v^2)$, $(u,v)\in D: u^2+v^2 \le 1$

$\vec{n}(u,v) = (-4u, -6v, 1)$

$\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,y^2)$

$$\therefore \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma \overset{\text{TEO. STOKES}}{=} \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D v^2\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\operatorname{sen}\theta)^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{4}.$$

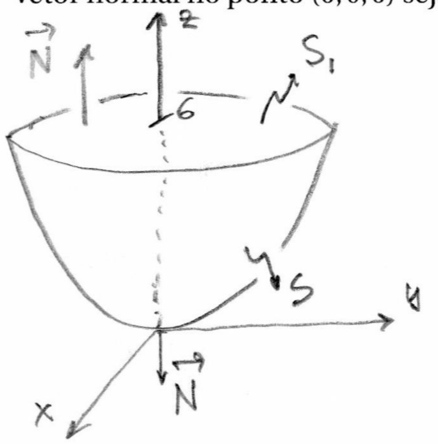
Questão 2 (**2 pontos**) Calcule

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

onde $\vec{F}$ é o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (\ln(6+z^4y^6)+xy^2,\ xz^4e^{-5z^2}+\cos x,\ 5x^3y^4+9x^5y^7+x^2z)$$

e S é a parte do parabolóide elíptico $z = 2x^2+3y^2$ limitada pelo plano $z=6$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,0)$ seja $-\vec{k}$.



E : SÓLIDO DELIMITADO POR S E S_1

TEO. DA DIVERGÊNCIA

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{(\star)} = \underbrace{\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV}_{(\star\star)}$$

$(\star)$ $\underline{S_1}$: $\vec{N} = \vec{k}$ (CONSTANTE)

$D: 2u^2+3v^2 \le 6 \rightsquigarrow \dfrac{u^2}{3}+\dfrac{v^2}{2} \le 1$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D \big(\underbrace{5u^3v^4+9u^5v^7}+6u^2\big)\,du\,dv$$

ÍMPAR EM u $\therefore$ TEM INTEGRAL ZERO SOBRE D

$$= 6\iint_D u^2\,du\,dv = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\sqrt{3}\,r\cos\theta)^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 18\sqrt{6}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{9\sqrt{6}\,\pi}{2}.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$(\star\star)$ $\operatorname{div}\vec{F} = y^2+x^2$

$$\therefore \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint_D x^2+y^2\int_{2x^2+3y^2}^{6} dz\,dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2)(6-2x^2-3y^2)\,dx\,dy$$

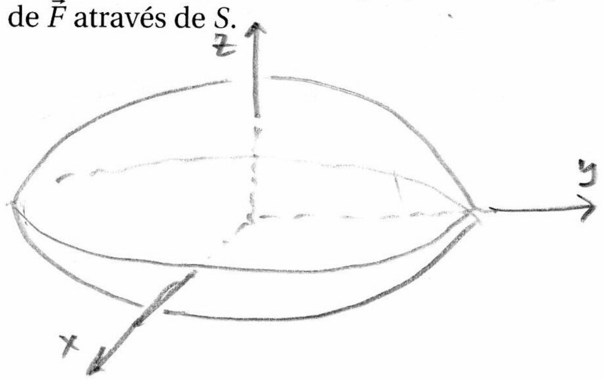
$$= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3r^3-\frac{r^5}{2}\right)\cos^2\theta + \left(2r^3-\frac{r^5}{3}\right)\mathrm{sen}^2\theta\ dr\,d\theta = \frac{10\sqrt{6}\,\pi}{9} \longrightarrow$$

$$\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \frac{9\sqrt{6}\,\pi}{2} - \frac{10\sqrt{6}\,\pi}{9} = \frac{61\sqrt{6}\,\pi}{18}.$$

Questão 3 (2 pontos) Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = ((y^{1977}+z^{1977})^{2014} - x^2\operatorname{sen}(3y-4z^3), \overset{\text{sen}}{\cancel{\cos}}(41x - xyz^3) + y\operatorname{sen}(xyz), \ln(1+x^2+y^2)+x^2z)$$

em $\mathbb{R}^3$ e S o elipsóide de equação $2x^2+4y^2+6z^2=1$ orientado pela normal exterior. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.



$$\operatorname{div}\vec{F} = 2x\operatorname{sen}(3y-4z^3) - $$
$$- xz^3 \cos(41x - xyz^3) + \operatorname{sen}(xyz) +$$
$$xyz\cos(xyz) + x^2$$

E : REGIÃO INTERIOR A S

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

$$= \iiint_E \{\underbrace{2x\operatorname{sen}(3y-4z^3) - xz^3\cos(41x-xyz^3) + \operatorname{sen}(xyz) + xyz\cos(xyz)}_{\text{ÍMPAR EM } x \ \therefore\ \text{TEM INTEGRAL ZERO EM } E\text{, POR SIMETRIA}}$$

$$+ x^2\}\,dV$$

$$= \iiint_E x^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\, r^2\operatorname{sen}\phi\, dr\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\int_0^1 r^4\,dr \cdot \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi = \frac{\pi}{30\sqrt{3}} \quad //$$

Questão 4 **(2 pontos)** Considere o campo

$$\vec{G}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right),$$

definido em $E = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

(a) **(1 ponto)** Calcule o fluxo de $\vec{G}$ através da esfera de centro na origem e raio 1.

$G = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, $\vec{r} = (x,y,z)$, S: ESFERA UNITÁRIA ORIENTADA PELA NORMAL EXTERIOR $\vec{N} = (x,y,z) = \vec{r}$

$$\therefore \iint_S \vec{G}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_S \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}\,dS$$

$$= \iint_S \frac{1}{\underbrace{|\vec{r}|}_{=1}}\,dS = 4\pi.$$

(b) **(1 ponto)** Existe um campo $\vec{F}$ definido em E tal que $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{G}$? Justifique sua resposta.

FATO SE S É SUPERFÍCIE FECHADA ORIENTADA PELA NORMAL EXTERIOR $\vec{N}$ ENTÃO $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = 0$.

PROVA 

TOME γ UMA CURVA FECHADA EM S $\therefore$ PODEMOS DECOMPOR $S = S_1 \cup S_2$ COM $\partial S_1 = \gamma = \partial S_2$. DO TEO. DE STOKES,

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_{S_1} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \iint_{S_2} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$= -\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma + \int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = 0.$$

CONCLUSÃO PELO ITEM (a), NENHUM CAMPO $\vec{F}$ SATISFAZ $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{G}$ EM E.