**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CM005 - Álgebra Linear (Engenharia Mecânica)**
**Prof. José Carlos Eidam**

# Lista 1

## ✰ Espaços e subespaços vetoriais

1. Verifique se os subconjuntos $F$ abaixo são subespaços vetoriais de $E = \mathbb{R}^n$:

   (a) $n = 2$, $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2015\}$

   (b) $n = 2$, $F = \{(x, y) : x^3 - xy^2 = 5\}$

   (c) $n = 2$, $F = \{(x, y) : 2x - 5y = 0\}$

   (d) $n = 2$, $F = \{(x, y) : 2x - 5y = 1\}$

   (e) $n = 2$, $F = \{(x, y) : 2x - 5y = 1\}$

   (f) $n = 3$, $F = \{(x, y, z) : x + y^2 + z^3 = 1\}$

   (g) $n = 3$, $F = \{(x, y, z) : x - e^y + z = 0\}$

   (h) $n = 3$, $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\,,\, 2x + 3y - z = 0\}$

   (i) $n = 3$, $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\,,\, 2x + 3y - z = 0\}$

   (j) $n = 3$, $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\,,\, 2x + 3y - z = 0\,,\, 4x - y + z = 0\}$

   (k) $n = 4$, $F = \{(x, y, z, w) : x - y + z - w = 0\,,\, 2x - 5y - z + 4w = 0\,,\, 3x + y + w = 0\}$

2. Verifique se os subconjuntos $F$ abaixo são subespaços vetoriais de $E = \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$:

   (a) $m = n = 2$ e $F$ é o conjunto formado pelas matrizes $A = (a_{ij})$ tais que $11a_{11} = 2a_{12} - 3a_{22}$;

   (b) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes cujo *traço* é zero;[1]

   (c) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes cujo *traço* é igual a 1977;

   (d) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes cujo determinante é igual a zero;

   (e) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes cujo determinante é igual a 31;

   (f) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes simétricas (i.e., $A^t = A$);

   (g) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas (i.e., $A^t = -A$);

   (h) $m, n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes tal que a soma dos elementos da primeira linha é igual a soma dos elementos da primeira coluna;

   (i) $m > 1, n > 1$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes tal que a soma dos elementos da primeira coluna é igual a soma dos elementos da segunda coluna;

[1] O *traço* de uma matriz quadrada é a soma de todos os elementos de sua diagonal.

(j) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes ortogonais (i.e., $A^t A = I$);

(k) $m = n$ quaisquer e $F$ é o conjunto das matrizes $A \in E$ tais que $AB = BA$ para toda $B \in E$.

3. Verifique se os subconjuntos $F$ abaixo são subespaços vetoriais de $E = \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$:

   (a) $F$ é formado pelas funções contínuas;

   (b) $F$ é formado pelas funções descontínuas;

   (c) $F$ é formado pelas funções polinomiais $p$ tais que $p(a) = p(b)$;

   (d) $F$ é formado pelas funções polinomiais $p$ tais que $p(a) = p(b) = 1977$;

   (e) $F$ é formado pelas funções $f \in E$ tais que $f(a) < f(b)$;

   (f) $F$ é formado pelas funções $f \in E$ tais que $f(x)^2 - 2f(x) = 11$;

   (g) $F$ é formado pelas funções $f \in E$ que possuem $n$ derivadas contínuas em $[a,b]$ (Este espaço é denotado por $\mathrm{C}^n([a,b],\mathbb{R})$);

   (h) $F$ é formado pelas soluções da equação diferencial $f''(x) - x^2 f'(x) + x f(x) = 0$;

   (i) $F$ é formado pelas soluções da equação diferencial $f''(x) - x^2 f'(x) + x f(x) = 0$ que satisfazem $f(a) = f(b) = 0$;

   (j) $F$ é o conjunto dos polinômios de grau $\leq 4$ que possuem pelo menos uma raiz real;

   (k) $F$ é o conjunto dos polinômios de grau igual a 6;

4. Sejam $F_1, F_2$ subespaços vetoriais de $E$ e considere as afirmações a seguir:

   ① A reunião $F_1 \cup F_2$ é um subespaço vetorial.

   ② A intersecção $F_1 \cap F_2$ é um subespaço vetorial.

   Estas afirmações são verdadeiras?

### ✰ Geradores

5. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos subespaços vetoriais $F \subset E$ abaixo:

   (a) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) : y = 2x\}$

   (b) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) : \alpha x + \beta y = 0\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

   (c) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) : 2x + 3y - z = 0\}$

   (d) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\}$

   (e) $E = \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$, $F$ é formado pelas matrizes simétricas;

   (f) $E = \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ e $F$ é o conjunto dos vetores tais que a primeira e a última coordenada são iguais;

   (g) $E = \mathbb{R}^5$ e $F$ é o núcleo da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(h) $E=\mathbb{R}^6$ e $F$ é o núcleo da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) $E=\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e $F$ é o conjunto dos polinômios $p$ tais que $p(0)=0$;

(j) $E=\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $F$ é o conjunto dos polinômios $p$ tais que $p(0)=p(1)$

(k) $E=\mathscr{P}_4(\mathbb{R})$ e $F$ é o conjunto dos polinômios tais que $p(0)=p(1)=p(-1)=0$.

6. Verifique se cada um dos conjuntos $X$ abaixo gera o espaço $E$:

(a) $X=\{(1,1),(2,3)\}$, $E=\mathbb{R}^2$;

(b) $X=\{(0,1),(0,6)\}$, $E=\mathbb{R}^2$;

(c) $X=\{(-1,1),(2,0),(1,0),(0,1)\}$, $E=\mathbb{R}^2$;

(d) $X=\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$, $E=\mathbb{R}^2$;

(e) $X=\{(1,1,1),(1,2,3)\}$, $E=\mathbb{R}^3$;

(f) $X=\{(1,1,1),(1,2,3),(0,0,2)\}$, $E=\mathbb{R}^3$;

(g) $X=\{(1,1,1),(1,2,3),(0,0,2),(0,1,-1)\}$, $E=\mathbb{R}^3$;

(h) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$, $E=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$;

(i) $X=\left\{1,x,x^2-1\right\}$, $E=\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$;

(j) $X=\left\{2015, 2016x-x^2, 2017x^3, 2018x\right\}$, $E=\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$;

7. Dados $m,n$ inteiros positivos, considere $E_{ij}$ a matriz $m\times n$ que possui todas as entradas nulas, exceto na posição $ij$, que vale 1. Verifique que:

(a) $\{E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}\}$ é uma base para $\mathrm{M}(2\times 3,\mathbb{R})$;

(b) $\{E_{11},E_{12},E_{13},E_{14},E_{15},E_{21},E_{22},E_{23},E_{24},E_{25},E_{31},E_{32},E_{33},E_{34},E_{35}\}$ é uma base para $\mathrm{M}(3\times 5,\mathbb{R})$;

(c) $\{E_{11},E_{12},E_{22}\}$ é uma base para o subespaço das matrizes $2\times 2$ simétricas.

(d) $\{E_{12}\}$ é uma base para o subespaço das matrizes $2\times 2$ anti-simétricas.