UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM005 - Álgebra Linear - Turma C (Engenharia Elétrica)
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Bases e dimensão

1. Determine bases e a dimensão para cada um dos subespaços F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ e $F_1 + F_2$ nos casos abaixo:

   (a) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3\}$ e $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}$

   (b) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$

   (c) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$ e $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_4 + x_6 = 0\}$

   (d) $F_1 = S((1,0,1,0),(0,1,0,1))$, $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = 0\}$

   (e) $F_1 = S((1,2,0,0,1),(0,1,0,-1,-2),(3,11,0,-5,-7))$, $F_2 = S((1,1,1,1,1),(0,0,0,0,1))$

   (f) $F_1 = S((1,-1,1,-1,2,1),(0,1,0,1,0,1))$, $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : x_2 - 2x_3 + x_6 = 0,\ x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$

   (g) $F_1 = S((1,-1,2,0,1),(0,1,0,0,-1))$, $F_2 = S((1,-1,1,-1,1),(0,2,0,-1,2))$

✰ Coordenadas e mudanças de base

2. Para cada uma das bases abaixo, determine as matrizes $M_{\mathscr{B},\mathrm{can}}$ e $M_{\mathrm{can},\mathscr{B}}$ e calcule as coordenadas do vetor v na base $\mathscr{B}$:

   (a) $\mathscr{B} = \{(1,2),(0,-1)\}$, $v = (2,2)$

   (b) $\mathscr{B} = \{(0,1),(2,3)\}$, $v = (1,-1)$

   (c) $\mathscr{B} = \{(1,0,1),(1,-1,0),(0,0,-1)\}$, $v = (1,0,1)$

   (d) $\mathscr{B} = \{(1,2,0),(-1,0,0),(1,0,1)\}$, $v = (0,0,1)$

   (e) $\mathscr{B} = \{(1,0,1,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,1),(0,-1,0,1)\}$, $v = (1,1,2,1)$

   (f) $\mathscr{B} = \{(1,1,1),(0,0,1),(0,1,1)\}$, $v = (0,-1,1)$

3. Mostre que qualquer matriz inversível $n \times n$ é a matriz de mudança de base $M_{\mathscr{B},\mathrm{can}}$ para alguma base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

4. Mostre que $M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} = M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \cdot M_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}$ para quaisquer bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$ de $\mathbb{R}^n$.

5. Determine as matrizes $M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$ e $M_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}$ onde $\mathscr{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ e $\mathscr{B}_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ são bases de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas do vetor $2 - x + x^3$ em relação à base $\mathscr{B}_1$.

6. Qual o único vetor que possui as mesmas coordenadas em relação à qualquer base?

7. Verdadeiro ou Falso com justificativa:

   ( ) A matriz de mudança de base sempre tem determinante não-nulo.

   ( ) As coordenadas de um vetor sempre mudam quando trocamos de base.

   ( ) Se o espaço E tem um conjunto de geradores com 2015 elementos, então $\dim E \leq 2015$.

   ( ) Se $F_1 \oplus F_2 = E$ então $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$.

   ( ) Se $F_1 + F_2 = E$ então $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$.

☆ Transformações lineares

8. Verifique se as transformações abaixo são lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = x_1$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, \sin(x_1 + x_2))$

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (13x_1 + 4x_2, x_1 - 3x_2 + 1, x_1 - x_3)$

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (3x_1 - 5x_2, x_1 + x_2)$

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 5x_2, x_1 + x_2, 12x_3 - x_1)$

   (f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_4 - x_1, 2x_1 + x_3, x_3)$

   (g) $T : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, $T(A) = A^2$

   (h) $T : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \operatorname{tr} A$ ($\operatorname{tr} A$ denota o *traço* de A, i.e., a soma dos elementos da diagonal principal de A)

   (i) $T : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, $T(A) = A^t$ (A^t denota a *transposta* de A, i.e., a matriz cujas colunas são as linhas de A, na mesma ordem)

   (j) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = p'$ (derivada de p)

   (k) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = p''$ (derivada segunda de p)

   (l) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(p) = p(2015)$

   (m) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = \displaystyle\int p$ (primitiva de p)

9. Determine as matrizes das transformações lineares do exercício anterior em relação às bases canônicas.

10. Descreva geometricamente cada uma das transformações lineares abaixo e determine suas matrizes em relação às bases canônicas:

    (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

    (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$

    (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$

    (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 3x_1)$

(e) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2)$

(f) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2) = (x_1,x_2,0)$

(g) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (-x_2,x_1)$

(h) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (4x_1,x_2)$

(i) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (-x_1,2x_2)$

(j) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = ((\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)x_2, (\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)x_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

11. Considere a reta $r: y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, em $\mathbb{R}^2$ e considere os operadores $P, R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de projeção ortogonal sobre r e reflexão em torno de r.

   (a) Mostre que $R = 2P - I$

   (b) Determine as matrizes de P, R em relação à base canônica e em relação à base $\mathscr{B} = \{(1,a), (-a,1)\}$.

   (c) Compare as matrizes obtidas no ítem anterior. Isso mostra porque é bom saber lidar com outras bases além da canônica.

12. Determine a matriz em relação à base canônica dos operadores lineares $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descritos geometricamente abaixo:

   (a) T quintuplica o comprimento de cada vetor;

   (b) T reduz pela metade o comprimento de cada vetor;

   (c) T projeta cada vetor ortogonalmente sobre o eixo y;

   (d) T rotaciona de 90 graus cada vetor no sentido anti-horário;

   (e) T rotaciona de 90 graus cada vetor no sentido horário;

   (f) T rotaciona de 30 graus cada vetor no sentido anti-horário;

   (g) T reflete ortogonalmente cada vetor em torno do eixo x e depois roda o vetor refletido de 45 graus;

   (h) T dobra o comprimento de cada vetor e depois reflete em torno do eixo y;

   (i) T reflete cada vetor em torno da origem e depois projeta o vetor refletido ortogonalmente em torno da reta $y = 2x$;

13. Determine a dimensão e bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuja matriz em relação às bases canônicas é dada abaixo:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(j) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

14. Determine a dimensão e bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:

(a) $T : \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \operatorname{tr} A$

(b) $T : \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R})$, $T(A) = A^t$

(c) $T : \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $T(A) = A^t - 2A$

(d) $T : \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R})$, $T(A) = A^t + A$

(e) $T : \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $T(A) = A^t - A$

(f) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = p'$ (derivada de p)

(g) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = p''$ (derivada segunda de p)

(h) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(p) = p(0)$

(i) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $Tp = \int p$ (primitiva de p)

15. Sejam A uma matriz $m \times n$ e k, l o posto e a nulidade de A, respectivamente.

(a) Se $k = 1$ e $A \neq 0$, determine l.

(b) Se $n = 1$ e $A \neq 0$, determine k.

(c) Se $n = 3$ e $k = 2$, determine l.

(d) Se $k = 1977$ e $l = 38$, determine n.

(e) Se $n = 15$ e $l = 11$, determine k.

(f) Se $n = l$ determine k.

(g) Se $n = k$, determine l.