UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM005 - Álgebra Linear (Engenharia Elétrica)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 16/04/2015

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 (2 pontos) Fixados $a, b, c \in \mathbb{R}$, expresse a solução geral do sistema linear abaixo em função das variáveis x_4 e x_5:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= a \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= b \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= c \end{cases}$$

MATRIZ DE COEFICIENTES:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & c-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to 2L_3 + L_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 2c+b-3a \end{array}\right)$$

SOLUÇÃO GERAL $\quad x_4 = s, \quad x_5 = t \quad$ PARÂMETROS

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ -2x_2 - x_4 = b - a \\ -4x_3 - x_4 = 2c + b - 3a \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{4}(x_4 + 2c + b - 3a)$$

$$\boxed{x_3 = -\frac{s}{4} - \frac{c}{2} - \frac{b}{4} + \frac{3}{4}a}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(x_4 + b - a) = -\frac{s}{2} - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

$$x_1 = a - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$$
$$= a - \left(-\frac{s}{2} - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{s}{4} - \frac{c}{2} - \frac{b}{4} + \frac{3}{4}a\right) - s - t$$
$$= -\frac{s}{4} - t - \frac{a}{4} + \frac{3}{4}b + \frac{c}{2}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{s}{4} - t - \frac{a}{4} + \frac{3}{4}b + \frac{c}{2} \\ x_2 = -\frac{s}{2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ x_3 = -\frac{s}{4} - \frac{c}{2} - \frac{b}{4} + \frac{3}{4}a \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Questão 2 Use escalonamento de Gauss para determinar a inversa e calcular o determinante de cada uma das matrizes A abaixo (cada ítem vale **2 pontos**):

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$

$$\det A = \det B = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$$

INVERSA $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - L]{L_3 \to}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to 2L_1 - L_3]{L_2 \to 4L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{4}L_3]{L_1 \to \frac{1}{2}L_1,\ L_2 \to \frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_3]{L_3 \to L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{L_4 \to L_4 - 2L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(\star)}$

JÁ CONCLUÍMOS QUE $\det A = 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

CONTINUANDO

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to 2L_2 \\ L_3 \to 4L_3 \\ L_4 \to -2L_4}]{\star}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -2 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2
\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to L_1 + L_4}]{L_3 \to L_3 - 3L_4}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\
0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2
\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 + 2L_3]{L_1 \to L_1 - L_3}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & -8 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -8 & 12 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2
\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{2}L_3]{\substack{L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{4}L_2}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{matrix}}_{\substack{\| \\ A^{-1}}} \\
0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}\right)$$

Questão 3 Considere o espaço vetorial $E = M(2\times 4, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes 2×4 com entradas reais e o subconjunto F formado pelas matrizes $A = (a_{ij}) \in E$ tais que

$$\star \quad \begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{14} &= 0 \\ a_{21} - 2a_{22} + a_{23} + 3a_{24} &= 0 \end{cases}$$

(a) **(2 pontos)** Verifique que F é um subespaço vetorial de E.

(i) SEJAM $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ EM F. ENTÃO AS ENTRADAS DE A E B SATISFAZEM $\star$. COMO $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$, TEMOS

$$(a_{11}+b_{11}) + (a_{12}+b_{12}) + (a_{13}+b_{13}) - (a_{14}+b_{14}) = \underbrace{(a_{11}+a_{12}+a_{13}-a_{14})}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{(b_{11}+b_{12}+b_{13}-b_{14})}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$= 0$, POIS $A, B \in F$. PARA A 2^{a} EQUAÇÃO TEMOS

$$(a_{21}+b_{21}) - 2(a_{22}+b_{22}) + (a_{23}+b_{23}) + 3(a_{24}+b_{24}) = \underbrace{(a_{21} - 2a_{22} + a_{23} + 3a_{24})}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$+ \underbrace{(b_{21} - 2b_{22} + a_{23} + 3a_{24})}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$, POIS $A, B \in F$. LOGO, $A+B \in F$.

(ii) SE $A = (a_{ij}) \in F$, ENTÃO OS a_{ij}'s SATISFAZEM $\star$. MULTIPLICANDO AMBAS AS EQUAÇÕES POR λ, VEMOS QUE AS ENTRADAS DE λA SATISFAZEM $\star$ $\therefore$ $\lambda A \in F$. LOGO, F É SUBESPAÇO.

(b) **(2 pontos)** Determine um conjunto de geradores para F.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \in F \iff \text{OS } a_{ij}\text{'s SATISFAZEM}$$

$\star$ $\therefore$ $a_{14} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$ E $a_{21} = 2a_{22} - a_{23} - 3a_{24}$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ 2a_{22} - a_{23} - 3a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{24}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LOGO,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È UM CONJUNTO DE GERADORES PARA F.