UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM005 - Álgebra Linear (Engenharia Elétrica)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

SEGUNDA PROVA - 26/05/2015

GABARITO

Nome: ______________________________

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 **(1 ponto)** Dentre as transformações lineares abaixo, somente uma pode existir. Qual delas? Justifique sua resposta!

(a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ injetora;

(b) $T : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^{10}$ sobrejetora mas não injetora;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ sobrejetora;

(d) $T : \mathbb{R}^{2015} \to \mathbb{R}^{2014}$ injetora;

(e) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ injetora mas não sobrejetora;

DADA $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEAR, O TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM, TEMOS

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T.$$

SE T É INJETORA, ENTÃO $\dim \ker T = 0$, ENTÃO $n = \dim \operatorname{Im} T \leq \dim \mathbb{R}^m = m$. LOGO, (a) E (d) NÃO EXISTEM.

SE T É SOBREJETORA ENTÃO $\dim \operatorname{Im} T = m$, LOGO

$$n = \dim \ker T + m \geq m.$$

PORTANTO, $m \leq n$. LOGO, A TRANSFORMAÇÃO (c) NÃO EXISTE.

EM GERAL, SE $m = n$ ENTÃO T É INJETORA SE E SÓ SE É SOBREJETORA. LOGO, (e) TAMBÉM NÃO EXISTE.

UM EXEMPLO DE TRANSFORMAÇÃO COMO EM (b) É

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{10}, x_{11}) = (x_1, x_2, \dots, x_{10}),$$

$$(x_1, \dots, x_{11}) \in \mathbb{R}^{11}.$$

RESPOSTA: (b)

Questão 2 Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^6$:

☞ F_1 é o subespaço de $\mathbb{R}^6$ gerado pelos vetores $u_1 = (1,-1,0,2,0,-1)$, $u_2 = (0,1,0,0,0,1)$, $u_3 = (1,2,1,-1,0,1)$ e $u_4 = (0,\alpha,\beta,1,0,1)$;

☞ F_2 é o espaço solução do sistema linear

$$(\star)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

1. **(1,5 ponto)** Determine α e β de forma que $\dim F_1 = 3$.

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - \alpha L_2]{L_3 \to L_3 - 3L_2}$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ É LI.

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 & 1-\alpha \end{matrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - \beta L_3} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+3\beta & 0 & 1-\alpha+\beta \end{matrix}$$

COMO $\{u_1, u_2, u_3\}$ É LI, TEREMOS $\dim F_1 = 3$ SE E SÓ SE A ÚLTIMA LINHA FOR NULA, OU SEJA $\begin{cases} 1+3\beta = 0 \\ 1-\alpha+\beta = 0 \end{cases}$ $\therefore$ $\boxed{\beta = -1/3 \text{ E } \alpha = 2/3.}$

2. **(1,5 ponto)** Determine uma base para F_2 formada por vetores que possuam apenas coordenadas 0, 1 e -1.

O SISTEMA LINEAR $(\star)$ EQUIVALE A $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_4 - x_6 \end{cases}$ TOMANDO $(x_1, x_2, \dots, x_6) \in F_2$

TEMOS

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-x_3 - x_5, -x_4 - x_6, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$= x_3(-1,0,1,0,0,0) + x_4(0,-1,0,1,0,0) + x_5(-1,0,0,0,1,0) +$

$+ x_6(0,-1,0,0,0,1)$

$\dots \longrightarrow$

ASSIM, TOMANDO

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, -1, 0, 1, 0, 0)$$

$$v_3 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$v_4 = (0, -1, 0, 0, 0, 1) \quad ,$$

TEMOS QUE $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ É UMA BASE DE F_2.

3. **(2 pontos)** Determine a dimensão de $F_1' + F_2$. , ONDE $F_1' = S(u_1, u_2, u_3)$

OBSERVANDO O ESCALONAMENTO DO ÍTEM (1), PODEMOS TROCAR u_3 POR $u_3' = (0, 0, 1, -3, 0, -1)$. COMO $F_1' + F_2$ É GERADO POR $\{u_1, u_2, u_3', v_1, v_2, v_3, v_4\}$ VEJAMOS COMO OBTER UMA BASE P/ $F_1' + F_2$ A PARTIR DESTES VETORES:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_3 \to L_3 - L_7}]{L_1 \to L_1 + L_3}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_5]{L_2 \to L_2 + 3L_5} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_4}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\therefore \dim(F_1' + F_2) = 6.$

Questão 3 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) **(1,5 ponto)** Determine uma base para a imagem de T formada pelas colunas da matriz A.

PARA OBTER UMA BASE PARA Im T, DEVEMOS ESCALONAR A POR COLUNAS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \to C_3 - C_2 \\ C_4 \to C_4 - 3C_2}]{C_2 \to 2C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3C_2]{C_3 \to C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LOGO, AS DUAS PRIMEIRAS COLUNAS FORMAM UMA BASE P/ Im T, i.e., $(2, 1, 2, 0)$ E $(1, 0, -1, 1)$.

(b) **(1,5 ponto)** Determine a dimensão do núcleo de T.

COMO $\dim \operatorname{Im} T = 2$ E $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 4$

ENTÃO $\dim \ker T = 2$.

(c) **(2 pontos)** Considere a base $\mathscr{B}$ formada pelos vetores $u_1 = e_1 - e_3$, $u_2 = e_2 + e_4$, $u_3 = e_1 - e_2$, $u_4 = e_3$ e o vetor $u = (0,1,0,1)$. Determine as coordenadas de Tu em relação à base $\mathscr{B}$.

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_3 \\ u_2 = e_2 + e_4 \\ u_3 = e_1 - e_2 \\ u_4 = e_3 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{aligned} & e_3 = u_4 \\ & e_1 = u_1 + e_3 = u_1 + u_4 \\ & u_2 + u_3 = e_1 + e_4 \\ \therefore\ & e_4 = u_2 + u_3 - (u_1 + u_4) \\ & \quad = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \\ & e_2 = u_2 - e_4 \\ & \quad = u_2 - (-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) \\ & \quad = u_1 - u_3 + u_4 \end{aligned}$$

$$M_{\mathcal{B},can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LOGO,

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + u_4 \\ e_2 = u_1 - u_3 + u_4 \\ e_3 = u_4 \\ e_4 = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \end{cases} \longrightarrow M_{can,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ASSIM, AS COORDENADAS DE Tu EM RELAÇÃO $\mathcal{B}$ SÃO OBTIDAS ASSIM

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M_{can,\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -5 \\ 17 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$