UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM005 - Álgebra Linear (Engenharia Elétrica)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 23/06/2015

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ as matrizes abaixo são diagonalizáveis e justifique sua resposta (cada ítem vale **2 pontos**):

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2015 & 2016 \\ 0 & a & 2017 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

AUTOVALORES $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = 0$: 1^a CONDIÇÃO $\rightarrow a \neq 0, a \neq 1$ IMPLIC[A]
A DIAGONALIZÁVE[L]

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $a = 0$: VAMOS ESTUDAR $\ker(A - \lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2015 & 2016 \\ 0 & 0 & 2017 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2015 x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \therefore$$

$u \in \ker(A - \lambda_3) \Leftrightarrow u = (-2015 x_2, x_2, 0)$ $\therefore$ $\dim \ker(A - \lambda_3) = 1 < 2 \Rightarrow$
A NÃO-DIAGONALIZÁVEL.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $a = 1$: VAMOS ESTUDAR $\ker(A - \lambda_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2015 & 2016 \\ 0 & 0 & 2017 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2015 x_2 + 2016 x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \therefore$$

$\dim \ker(A - \lambda_3) = 1 < 2 \Rightarrow$ A NÃO DIAGONALIZÁVEL.

PORTANTO, A É DIAGONALIZÁVEL SE E SÓ SE $a \neq 0$ E $a \neq 1$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

AUTOVALORES

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = a.$$

ASSIM, $a \neq 0$ E $a \neq 2 \Rightarrow$ A DIAGONALIZÁVEL.

CASO 1 $a = 0$: $\ker(A - \lambda_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \therefore$$

$(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0) \Rightarrow \dim \ker(A - \lambda_1) = 1 < 2 \Rightarrow$
A NÃO-DIAGONALIZÁVEL.

CASO 2 $a = 2$: $\ker(A - \lambda_2)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = x_3(3, 2, 1)$$

$\therefore \dim \ker(A - \lambda_2) = 1 < 2 \Rightarrow$
A NÃO-DIAGONALIZÁVE[L]

LOGO, A É DIAGONALIZÁVEL SSS $a \neq 0$ E $a \neq 2$.

Questão 2 Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) **(2 pontos)** Determine uma base ortonormal para F.

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - (2x_2 + 2x_3) = -3x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\therefore (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_2 - 3x_3, x_2, x_3, 2x_2 + 2x_3)$$

$$= x_2 \underbrace{(-3, 1, 0, 2)}_{= u_1} + x_3 \underbrace{(-3, 0, 1, 2)}_{u_2}$$

BASE P/ F : $\{u_1, u_2\}$

GRAM-SCHMIDT $v_1 = u_1 = (-3, 1, 0, 2)$

$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = (-3, 0, 1, 2) - \frac{13}{14}(-3, 1, 0, 2) = \left(\frac{-3}{14}, \frac{-13}{14}, 1, \ldots\right)$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 1, 0, 2) \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{358}}(-3, -13, 14, 2) \end{aligned}\right\}$$ $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ É BASE ORTONORMAL P/ F.

(b) **(2 pontos)** Determine uma base ortonormal para $F^\perp$.

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^\perp \iff \begin{cases} u \cdot u_1 = 0 \\ u \cdot u_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}(-x_2 - 2x_4) = -\frac{1}{3}(-x_3 - 4x_4 \ldots) = \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

$$\therefore (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\left(\frac{1}{3}, -1, 1, 0\right) + x_4 \underbrace{(2, -4, 0, 1)}_{= u_2}$$

GRAM-SCHMIDT $\underline{u_1 = (1, -3, 3, 0)}$,

$v_1 = u_1 = (1, -3, 3, 0)$

$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = (2, -4, 0, 1) - \frac{14}{19}(1, -3, 3, 0) = \left(\frac{24}{19}, \frac{-34}{19}, -\frac{42}{19}, 1\right)$

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{19}}(1, -3, 3, 0)$

$w_2 = \frac{1}{\ldots}(24, -34, -42, 19)$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ É BASE ORTONORMA P/ $F^\perp$

Questão 3 **(2 pontos)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Use o que você aprendeu sobre diagonalização de matrizes para calcular A^{10}. Você ganha mais um ponto se encontrar a expressão (correta) para A^n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

AUTOVALORES DE A

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_1 = 1$$

$\boxed{\lambda_1}$ $(A - \lambda_1) u_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore x + y =$

PODEMOS TOMAR $u_1 = (1, -1)$

$\boxed{\lambda_2}$ $(A - \lambda_2) u_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore 4x + 5$

PODEMOS TOMAR $u_2 = (5, -4)$ E CHAMAR $\mathbb{B} = \{u_1, u_2\}$

PONDO $U = M_{\mathbb{B}, can} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, TEMOS $U^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E $U^{-1} A U = D \doteq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. LOGO,

$U^{-1} A^n U = D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P/ TODO $n \in \mathbb{N}$.

PORTANTO, $A^n = U D^n U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 5 \\ -2^n & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^n + 5 & -5 \cdot 2^n + 5 \\ 4 \cdot 2^n - 4 & 5 \cdot 2^n - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 - 2^{n+2} & 5(1 - 2^n) \\ 2^{n+2} - 4 & 5 \cdot 2^n - 4 \end{pmatrix}.$$

$\longrightarrow$

PARA $n=10$, TEMOS

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 5-4096 & -5\cdot 1023 \\ 4096-4 & 5120-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4091 & -5115 \\ 4092 & 5116 \end{pmatrix}.$$