UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM005 - Álgebra Linear (Engenharia Elétrica)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

PROVA SUBSTITUTIVA - 25/06/2015

GABARITO

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 (3 pontos) Considere os subespaços

$$F_1 = S(\underbrace{(1,0,1,0)}_{=u_1}, \overbrace{(0,1,0,1)}^{=u_2}, \overbrace{(2015,2016,2015,2016)}^{=u_3})$$

$$F_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Determine as dimensões de F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ e $F_1 + F_2$.

$u_3 = 2015 u_1 + 2016 u_2 \quad \therefore \quad F_1 = S(u_1, u_2)$ e $\{u_1, u_2\}$ É LI.

LOGO $\boxed{\dim F_1 = 2.}$

$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F_2 \Leftrightarrow x_4 = x_1 - x_2 + x_3 \therefore$

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_1 - x_2 + x_3) = x_1 \underbrace{(1,0,0,1)}_{= v_1} + x_2 \underbrace{(0,1,0,-1)}_{= v_2} + x_3 \underbrace{(0,0,1,1)}_{= v_3}.$$

ASSIM, $\{v_1, v_2, v_3\}$ É BASE DE $F_2 \therefore \boxed{\dim F_2 = 3}$

TEMOS QUE $F_1 + F_2 = S(u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$\therefore \boxed{\dim(F_1 + F_2) = 4.}$ como $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$, TEMOS $\boxed{\dim(F_1 \cap F_2) = 1}$

Questão 2 **(2 pontos)** Determine bases para o núcleo e para a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação às bases canônicas é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>BASE P/ $\text{Im}\, T$</u> : ESCALONANDO POR COLUNAS :

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{C_2 \to 5C_2 + C_3} \begin{matrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{C_1 \to 3C_1 - C_2} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \\ -2 & -1 & - \end{matrix}}_{LI}$$

<u>BASE P/ $\text{Im}\, T$</u> : $(0,0,0,-2), (0,3,0,-1), (-5,13,0,-1)$

COMO $\dim \ker T + \dim \text{Im}\, T = 3$, SEGUE QUE T É

INJETORA $\therefore$ $\ker T = \{0\}$.

Questão 3 **(3 pontos)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Use o que você aprendeu sobre diagonalização de matrizes para determinar uma matriz B tal que $B^2 = A$.

AUTOVALORES DE A

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ E } \lambda_2 = 2$$

AUTOVETORES DE A

λ_1 $$\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ $u_1 = (5,-4)$ É UM AUTOVETOR CORRESPONDENTE A λ_1.

λ_2 $$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ $u_2 = (-1,1)$ É UM AUTOVETOR CORRESPONDENTE A λ_2.

MATRIZ DE MUDANÇA DE BASE

$$U \doteq M_{\mathcal{B},can} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U^{-1}AU = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$ PONDO $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

TEMOS $C^2 = D$. ASSIM,

$$B = UCU^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} \\ -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-4\sqrt{2} & 5(1-\sqrt{2}) \\ 4(\sqrt{2}-1) & -4+5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ É TAL QUE $B^2 = A$.

Questão 4 **(2 pontos)** Determine um sistema linear com 4 incógnitas cujo espaço-solução seja gerado pelos vetores $\underbrace{(1,2,0,2)}_{u_1}$ e $\underbrace{(0,1,1,1)}_{u_2}$.

CONSIDERE $u \in S(u_1, u_2)$, $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - x_1 L_1} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - 2x_1 & x_3 & x_4 - 2x_1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - (x_2 - 2x_1) L_2} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 & -x_2 + x_4 \end{matrix}$$

$$\therefore \quad u \in S(u_1, u_2) \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$