UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM037 - Tópicos de Análise I
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Limites de sequências

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cada sequência $\{x_n\}$ a seguir, justificando suas respostas:

(1) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (2) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$ (3) $x_n = \sqrt[n]{n^4+2011n^3-5}$

(4) $a_n = \left(4+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ (5) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$ (6) $a_n = \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

(7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (8) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ (9) $a_n = \dfrac{2n}{n+1} - \dfrac{n+1}{2n}$

(10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (11) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ (12) $a_n = \sin n$

(13) $a_n = \dfrac{2n+\sin n}{5n+1}$ (14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$ (15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(16) $a_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ (17) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n+10^n}$ (18) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

(19) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (21) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(22) $a_n = n - n^2 \sin\dfrac{1}{n}$ (23) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $0<a<b$ (24) $a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$

(25) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ (26) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+\sin(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}}$ (27) $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (29) $a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (30) $a_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a>0$ (33) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$

(34) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(35) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

(36) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+11}\right)^{n}$

(37) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+1}\right)^{n}\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n}$

(38) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

(39) $a_n = \sin(\dfrac{n\pi}{2})\cos n$

(40) $a_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$

(41) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

(42) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!^2}}$

(43) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$

(44) $a_n = \sqrt[n]{n^4+2012n^3-5}$

(45) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$

(46) $a_n = \dfrac{n!^2}{n^{2n}}$

(47) $a_n = \dfrac{5^n}{2^n+3^n+4^n}$

(48) $a_n = \dfrac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$

(49) $a_n = \dfrac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$

(50) $a_n = \left(\dfrac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$

(51) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(52) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(53) $x_n = \dfrac{5^n}{3^n+5^n+7^n}$

☆ Limite superior e inferior de sequências

2. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais. Mostre que $\{x_n\}$ é convergente se e só se $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Neste caso, este valor comum é o limite de $\{x_n\}$.

3. Suponha que $|x_n| \le \cos n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $-1 \le \liminf_{n\to\infty} x_n \le 1$.

4. Calcule os valores de aderência da sequência $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Mostre que toda sequência possui uma subsequência monótona. Obtenha a partir daí uma prova do teorema de Bolzano-Weierstrass.

6. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.

   ① Se $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   ② Se $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

   ③ Se $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

7. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \ge x_n$ para todo $n \ge k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \text{ é um termo destacado}\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

   ① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

   ② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

   ③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

8. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

   ① Seja $M > 0$ tal que $-M \le x_n \le M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \le x_n$ para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha = \sup X$ existe e $\alpha \le M$.

   ② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

   ③ Conclua que α é valor de aderência de $\{x_n\}$; em particular, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$.

☆ Limite superior e inferior de funções

9. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, mostre que f é contínua, exceto em um conjunto *enumerável.*

10. Suponhamos que $\liminf_{x\to a} f(x) = A$ e $\limsup_{x\to a} f(x) = B$. Mostre que se $x_n \to a$ então

$$A \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \le \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \le B\,.$$

11. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada.

   (a) Mostre que as funções $\underline{f}(x) \doteq \liminf_{y\to x} f(y)$ e $\overline{f}(x) \doteq \limsup_{y\to x} f(y)$, $x \in [a,b]$ são semi-contínuas inferiormente e superiormente, respectivamente.

   (b) Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções semi-contínuas inferiormente e superiomente, respectivamente, tais que $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Mostre que

$$\varphi(x) \le \underline{f}(x) \le \overline{f}(x) \le \psi(x)\,,\ \ x \in [a,b]\,.$$

   Por esta razão, as funções $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são chamadas de *envelope inferior* e *envelope superior* de f, respectivamente.

12. Mostre que a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$ e $f(x) = q$ se $x = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si não é limitada superiormente em nenhum intervalo não degenerado.

13. Mostre que o conjunto dos valores de aderência de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$, $x \ne 0$, $f(0) = 0$ em $x = 0$ é o intervalo $[-1,1]$.

14. Determine o conjunto dos valores de aderência de $f(x) = \dfrac{\cos(1/x^3 - 1)}{\ln|x-1| + e^{1/x-1}}$, $x \ne 1$, $f(1) = 0$, em $x = 1$.