**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CM112 - Análise III**
**Prof. Zeca Eidam**

# Lista 1

1. Seja $(\cdot,\cdot)$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $|\cdot|$ a norma induzida por $(\cdot,\cdot)$. Prove as identidades:

   (a) $(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right)$

   (b) $|x|^2 + |y|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|x+y|^2 + |x-y|^2\right)$ (Identidade do Paralelogramo)

2. Prove que uma norma qualquer provém de um produto interno se e só se satisfaz a identidade do paralelogramo.

3. Considere em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ a norma e o produto interno euclidianos. Prove que as afirmações abaixo a respeito de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são equivalentes:

   (a) $|Tx| = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$;

   (b) $|Tx - Ty| = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;

   (c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;

   (d) $T$ leva conjuntos ortonormais em conjuntos ortonormais;

   (e) $T^*T = I$

   (f) As colunas da matriz de $T$ em relação a base canônica formam um conjunto ortonormal.

   Uma transformação linear satisfazendo às condições acima é dita *ortogonal*. Mostre que se $T$ é ortogonal então $\det T = \pm 1$.

4. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$:

   - $\mathrm{GL}(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é inversível}\}$;
   - $\mathrm{GL}_+(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é inversível e } \det T > 0\}$;
   - $\mathrm{GL}_-(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é inversível e } \det T < 0\}$;
   - $\mathrm{O}(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é ortogonal}\}$;
   - $\mathrm{SO}(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é ortogonal e } \det T = 1\}$;
   - $\mathrm{P}(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ é auto-adjunto positivo}\}$;
   - $\mathrm{SL}(n) \doteq \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : \det T = 1\}$;

   Prove as seguintes afirmações:

(a) Prove que $\mathrm{GL}(n)$ e $\mathrm{GL}_{\pm}(n)$ são abertos e $\mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}_{+}(n) \cup \mathrm{GL}_{-}(n)$. Conclua que $\mathrm{GL}(n)$ é desconexo.

(b) Prove que $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ são fechados e $\mathrm{O}(n), \mathrm{SL}(n)$ também são desconexos.

(c) Prove que $\mathrm{GL}_{+}(n)$, $\mathrm{GL}_{-}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ são conexos. Em particular, $\mathrm{GL}_{+}(n)$ e $\mathrm{GL}_{-}(n)$ são as componentes conexas de $\mathrm{GL}(n)$. (Este ítem requer mais álgebra linear do que os outros. Enjoy it!)

(d) (Decomposição polar) Mostre que a aplicação

$$\mathrm{P}(n) \times \mathrm{O}(n) \ni (P, U) \mapsto PU \in \mathrm{GL}_{+}(n)$$

é contínua e *sobrejetora*.

(e) Mostre que $\mathrm{GL}(n), \mathrm{GL}_{+}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SL}(n)$ são subgrupos multiplicativos de matrizes.

(f) Mostre que $\mathrm{P}(n)$ é convexo. Além disso, $\mathrm{P}(n)$ é um *cone*, i.e., se $t > 0$ e $T \in \mathrm{P}(n)$ então $tT \in \mathrm{P}(n)$.

5. Considere em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ as seguintes normas:

- $\|T\| \doteq \sup\limits_{|x|=1} |Tx|$; ($|\cdot|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$);
- $\|T\|_1 \doteq \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$, onde $(a_{ij})$ é a matriz de $T$ em relação à base canônica;
- $\|T\|_\infty \doteq \max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$, onde $(a_{ij})$ é a matriz de $T$ em relação à base canônica;

Determine as melhores constantes $C_1, \dots, C_6 > 0$ que satisfazem as desigualdades a seguir:

(a) $C_1\|T\| \le \|T\|_1 \le C_2\|T\|$;

(b) $C_3\|T\| \le \|T\|_\infty \le C_4\|T\|$;

(c) $C_5\|T\|_1 \le \|T\|_\infty \le C_6\|T\|_1$.

Tente o mesmo com a norma $\|\cdot\|_p$.

6. Prove que as aplicações abaixo são contínuas:

(a) $\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni (x, T) \mapsto Tx \in \mathbb{R}^m$

(b) $\mathscr{L}(R^n, \mathbb{R}^m) \ni T \mapsto T^* \in \mathscr{L}(R^m, \mathbb{R}^n)$

(c) $\mathscr{L}(R^n) \ni T \mapsto T^k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$

7. Prove as afirmações abaixo:

(a) O conjunto das transformações lineares injetoras é aberto e denso em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se $n \le m$.

(b) O conjunto das transformações lineares sobrejetoras é aberto e denso em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se $n \le m$.

(c) $\mathrm{GL}(n)$ é aberto e denso em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

(d) O conjunto dos operadores lineares $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ que possuem $n$ autovalores distintos é aberto e denso em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

8. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e *convexo*. Mostre que para qualquer $p \notin X$ existe um único ponto $q \in X$ tal que
$$|p - q| = \inf_{x \in X} |p - x|.$$
Certifique-se de que as hipóteses sobre $X$ são essenciais, i.e., o resultado é válido em geral somente sob estas hipóteses.

9. Prove que $\langle S, T \rangle \doteq \mathrm{tr}(S^* T)$ define um produto interno em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Identifique a norma proveniente deste produto interno.

10. Prove que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é inversível se e só se existe $c > 0$ tal que $|Tx| \geq c|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $|T^{-1}| \leq 1/c$.

11. Prove que $\mathrm{GL}(n) \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathrm{GL}(n)$ é contínua.

12. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Prove que $X \times Y$ é aberto (fechado) se $X, Y$ forem abertos (fechados).

13. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : K \times U \to \mathbb{R}^k$ contínua. Prove que dados $y \in U$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon$ se $|y - y'| < \delta$, *para todo* $x \in K$.

14. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : K \times U \to \mathbb{R}^k$ contínua. Prove que dados $L \subset U$ compacto e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ se $|x - x'| + |y - y'| < \delta$, *para todos* $x \in K$ *e* $y \in L$.

15. Mostre que um aberto de $\mathbb{R}^n$ é conexo se e só se é conexo por caminhos.