UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM112 - Análise III
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

1. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathbb{R}^m$ é dita *localmente lipschitziana* se para cada $x \in X$ existem $\delta_x, C_x > 0$ tal que $|f(y) - f(z)| \le C_x|y - z|$ para todos $y, z \in B(x, \delta_x)$. Mostre que se X é compacto então uma tal f é *lipschtziana*, i.e., existe $C > 0$ tal que $|f(y)-f(z)| \le C_x|y-z|$ para todos $y, z \in X$.

2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta_i)$ uma cobertura de K por meio de bolas, com $x_1, \dots, x_k \in X$ e $\delta_1, \dots, \delta_k > 0$. Determine um número de Lebesgue para esta cobertura em termos de $\delta_1, \dots, \delta_k$.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ contínua e injetora. Mostre que $f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

4. Mostre que $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ são compactos, sendo o primeiro desconexo e o segundo conexo.

5. $\mathrm{SL}(n)$ é compacto? E conexo?

6. Mostre que $\{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : T \text{ tem } n \text{ autovalores distintos}\}$ é denso em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

7. Seja $D \subset \mathbb{R}$ denso. Verifique se cada um dos conjuntos abaixo é denso em $\mathbb{R}^n$:

   (a) $\{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in D$, para cada $j = 1, \dots, n\}$;

   (b) $\{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in D$, para algum $j = 1, \dots, n\}$;

   (c) $\{(x_1, \dots, x_n)$: As primeiras k coordenadas de x são da forma $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde $k \le n$ é fixado.

   Faça brincadeiras tomando $D \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números algébricos, números da forma $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ ou outros conjuntos densos de $\mathbb{R}$. Aproveite!

8. Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ funcionais lineares em $\mathbb{R}^n$. Para cada $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, estude a compacidade do conjunto
$$H_c \doteq \{x : \varphi_j(x) \le c_j\, ,\ j = 1, \dots, k\}$$
   Quando $k = n + 1$, a fronteira do conjunto deslocado $v + H_c$, $v \in \mathbb{R}^n$, é chamada de *poliedro* em $\mathbb{R}^n$.

9. Mostre que são equivalentes as afirmações abaixo a respeito de uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

   - $f^{-1}(K)$ é compacto para todo $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto;
   - $\lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = \infty$.

   Uma aplicação satisfazendo estas condições é dita *própria*. Mostre que a inversa de uma bijeção própria é contínua.