UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM112 - Análise III
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

1. Para cada uma das funções $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abaixo, determine a imagem por f das retas $x=c$ e $y=c$ e verifique se f é injetora e sobrejetora.

   (a) $f(x,y)=(u,v)$, onde $u=x$, $v=xy$

   (b) $f(x,y)=(u,v)$, onde $u=x^2-y^2$, $v=2xy$

2. Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano de equação $x_1+x_2+x_3+1=0$ e $f:\mathbb{R}^3\setminus\pi \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1,x_2,x_3)=(u_1,u_2,u_3),$$

   onde $u_j=\dfrac{x_j}{1+x_1+x_2+x_3}$, $j=1,2,3$. Mostre que $\det df(x_1,x_2,x_3)=(1+x_1+x_2+x_3)^{-1}$ e determine f^{-1}.

3. Considere o sistema de equações não-lineares

$$F:\begin{cases} \xi_1^3+\xi_2\eta_1+\eta_2 &= \theta_1 \\ \xi_1\eta_2+\xi_2^3-\eta_1 &= \theta_2 \end{cases}$$

   nas variáveis $\xi=(\xi_1,\xi_2), \eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2$.

   (a) Em quais pontos (ξ,η) podemos resolver o sistema $F(\xi,\eta)=\theta$ escrevendo ξ em função de η?

   (b) Determine as derivadas parciais desta função solução em relação a η_1 e η_2.

4. Mostre que $F:B(0;1)\to\mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}}$$

   é um difeomorfismo de classe C^∞ e determine seu inverso.

5. Sejam $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $f:U\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\det df(x)\neq 0$ para todo $x\in U$. Mostre que $f(U)$, a imagem de f, é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

6. Seja $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Mostre que f *não é* injetora.

7. Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Mostre que f *não é* sobrejetora.

8. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Mostre que f é injetora. Este resultado admite uma versão semelhante no caso $n > 1$? Justifique.

9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que $\det df(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Mostre que f é um difeomorfismo local de classe C^k.

10. Admita que a equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

admita n raízes distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $|b_j - a_j| < \delta$ para cada $j = 1, \ldots, n$ então a equação polinomial

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

admite n raízes distintas $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ e a aplicação $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é de classe C^∞.

11. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $df(x)$ é uma *isometria* para todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e., $|df(x) \cdot v| = |v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Mostre que existem $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = Tx + a$, $x \in \mathbb{R}^n$.

12. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa (i.e., f é de classe C^1 e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann). Mostre que se $f'(z_0) \neq 0$ então existem abertos $z_0 \in V \subset U$ e $W \ni f(z_0)$ tais que a restrição de f a V admite uma inversa $g : W \to V$ também holomorfa.

13. Prove o teorema da função inversa a partir do teorema da função implícita.