UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM112 - Análise III
Prof. Zeca Eidam

Lista 5

1. **(1 ponto)** Sejam M uma variedade diferenciável e $F_0, F_1 \subset M$ fechados disjuntos. Mostre que existe $\chi : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\chi(x) = 0$ se $x \in F_0$ e $\chi(x) = 1$ se $x \in F_1$.

2. **(1 ponto)** Sejam M uma variedade diferenciável, $U \subset M$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Mostre que dado qualquer $K \subset U$ compacto, existe $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\tilde{f}|_K = f$.

3. **(1 ponto)** Seja $\mathbb{RP}^n$ o *espaço projetivo* de dimensão n, i.e., $\mathbb{RP}^n$ é o quociente da esfera S^n pela relação de equivalência que identifica os antípodas. Mostre que $\mathbb{RP}^n$ é orientável se e só se n é ímpar.

4. **(1 ponto)** Se M é uma variedade diferenciável e existem abertos $U, V \subset M$ que admitem cartas locais $x : U \to U'$, $y : V \to V'$ tais que $M = U \cup V$ e $U \cap V$ é conexo, então M é orientável.

5. **(1 ponto)** Seja M uma variedade diferenciável conexa. Mostre que quaisquer dois pontos podem ser unidos por uma curva de classe C^∞.

6. **(1 ponto)** Seja $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio complexo não-constante. Considere p como uma aplicação $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞.

   (a) Mostre que $p^{-1}(b)$ é finito para todo $b \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Denotando por $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos valores regulares de p, mostre que a aplicação $b \mapsto \#p^{-1}(b)$ é localmente constante em A. ($\#X$ denota o número de elementos do conjunto finito X.)

   (c) Prove o Teorema Fundamental da Álgebra, i.e., prove que existe algum z tal que $p(z) = 0$. (Dica: Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é finito, em particular, A é conexo.)

7. **(1 ponto)** Seja M uma variedade não-orientável e

$$\tilde{M} \doteq \{(p, \mathscr{O}_p) : p \in M \text{ e } \mathscr{O}_p \text{ é uma orientação em } T_pM\}.$$

   Introduza uma estrutura diferenciável em $\tilde{M}$ que a torna uma variedade diferenciável tal que a aplicação de projeção $\pi : \tilde{M} \to M$ dada por $\pi(p, \mathscr{O}_p) = p$ é um difeomorfismo local. Mostre que $\tilde{M}$ é orientável. $\tilde{M}$ é chamada de *recobrimento duplo orientável de M*.

8. **(1 ponto)** Sejam $z = f(y)$ uma função positiva de classe C^∞ definida no intervalo $a < y < b$ e $M \subset \mathbb{R}^3$ a superfície que se obtém rotacionando o gráfico de f no plano yz em torno do eixo y.

   (a) Mostre que a aplicação $\Phi(y, \theta) = (f(y)\sin\theta, y, f(y)\cos\theta)$, $(y, \theta) \in (a, b) \times (0, 2\pi)$, é uma parametrização de M menos um conjunto de medida nula. Em particular, podemos introduzir em M coordenadas (y, θ).

(b) Considere M orientada de forma que o vetor normal em um ponto da forma $(0, y, f(y))$ tem terceira coordenada positiva. Mostre que o elemento de área de M se escreve localmente como
$$dS = f\sqrt{1+(f')^2}\,dy \wedge d\theta\,.$$

(c) Calcule, usando a forma acima, a área de uma esfera de raio $r > 0$ centrada na origem.

9. **(2 pontos)** Dados inteiros $n \geq k \geq 0$, considere o conjunto $\mathrm{W}(k;n)$ cujos elementos são k-uplas de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que $\mathrm{W}(k;n) \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}}$ é aberto. Em particular, $\mathrm{W}(k;n)$ admite uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão kn.

   (b) Considere o subconjunto $\mathscr{W}(k;n)$ de $\mathrm{W}(k;n)$ formado pelos referenciais *ortonormais*. Mostre que $\mathscr{W}(k;n)$ é uma variedade diferenciável e calcule sua dimensão. Esta variedade é chamada de *variedade de Stiefel de k-referenciais em* $\mathbb{R}^n$.

   (c) Seja $\Phi : \mathrm{W}(k;n) \to \mathscr{W}(k;n)$ a aplicação que associa a cada $(v_1,\ldots,v_k) \in \mathrm{W}_k(n)$ o conjunto ortonormal obtido a partir de $\{v_1,\ldots,v_k\}$ pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Mostre que Φ é de classe C^∞.

   (d) Mostre que todo $(v_1,\ldots,v_k) \in \mathrm{W}_k(n)$ admite uma vizinhança aberta U em $\mathrm{W}(k;n)$ e uma aplicação contínua (na verdade, de classe C^∞!) $F : U \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $F(w_1,\ldots,w_k)\cdot v_j = w_j$ para $j = 1,\ldots,k$.

   (e) Considere a aplicação $f : \mathrm{W}(k;n) \to \mathrm{Gr}(k;n)$ que associa a cada k-upla $(v_1,\ldots,v_k) \in \mathrm{W}_k(n)$ o subespaço gerado por $v_1,\ldots,v_k$, onde $\mathrm{Gr}(k;n)$ denota a variedade Grassmanniana de k-planos em $\mathbb{R}^n$. Mostre que f é uma submersão de classe C^∞.

   (f) Usando $\mathrm{W}_n(n)$ e o ítem anterior, construa um difeomorfismo entre $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{O}(n)\times\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

   (g) Obtenha $\mathrm{Gr}(k;n)$ como quociente de $\mathscr{W}(k;n)$ pela ação de um subgrupo de $\mathrm{GL}(n;R)$.