UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

☆ Números Naturais e o Princípio de Indução Finita

1. Mostre que $n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que não existe nenhum $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n+1$.

2. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto não-vazio de números naturais e admita que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que X tem elemento máximo, i.e., existe $b \in X$ tal que $n \leq b$ para todo $n \in X$.

3. Mostre que dados $m, n \in \mathbb{N}$ vale o *princípio da tricotomia*: ou $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$, exclusivamente.

4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ não-vazio com a seguinte propriedade: *Se X contém todos os números naturais menores que um certo $n \in \mathbb{N}$ então $n \in X$.* Mostre que $X = \mathbb{N}$. Esta propriedade é chamada de *Princípio da Indução Forte*.

5. Mostre que dados dois naturais $m < n$ sempre existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $n < bm$. (Princípio de Arquimedes)

6. Defina a subtração $m - n$ de dois naturais m, n tais que $m < n$. Enuncie e prove as propriedades pertinentes que puder.

7. Defina a potenciação m^n de dois naturais m, n quaisquer. Enuncie e prove as propriedades pertinentes que puder.

8. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m divide n se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = mk$, sendo este fato denotado por $m|n$. O número k é também denotado por n/m.

   (a) Prove que a relação de divisibilidade é reflexiva e transitiva.

   (b) Prove que se $m|n$ e $m|p$ então $m|(n+p)$.

9. Prove as seguintes desigualdades:

   (a) $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$;

   (b) $n! \geq 3^n$ para todo $n \geq 7$;

   (c) $n! \geq 4^n$ para todo $n \geq 9$;

   (d) $2^{n-2} \geq 2n - 3$ para todo $n \geq 5$;

10. Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por $d_n = n(n-3)/2$.

11. Uma vitória régia encontra-se em um tanque de água. Sabendo que ela dobra de área a cada dia e que, no final de 20 dias, ocupa toda a superfície do tanque, em qual dia ela ocupará a metade da superfície do tanque?

12. Em uma cidade de 5 000 habitantes, alguém resolve espalhar um boato. Considerando que, a cada 10 minutos, uma pessoa é capaz de contar o caso para 3 pessoas desinformadas, determine em quanto tempo toda a cidade fica conhecendo o boato.

13. Prove que as identidades abaixo são verdadeiras para todo $n \in \mathbb{N}$:

    (a) $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

    (b) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

    (c) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

    (d) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

    (e) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

    (f) $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

    (g) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

    (h) $1^4+2^4+\ldots+n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

    (i) $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

    (j) $3+11+\ldots+(8n-5) = 4n^2-n.$

14. Encontre uma fórmula fechada para as seguintes somas:

    (a) $2+4+6+\ldots+2n$

    (b) $12+17+22+\ldots+(12+5n)$

    (c) $1977+1988+1999+\ldots+(1977+11n)$

    (d) $a+(a+r)+(a+2r)+\ldots+(a+nr)$, para $a, r \in \mathbb{N}$ quaisquer

    (e) $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)$

    (f) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$

    (g) $1\cdot 3+3\cdot 5+\ldots+(2n-1)(2n+1)$

    (h) $n+(n-1)2^2+(n-2)3^2+\ldots+n^2$

    (i) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2$

    (j) $1^4+2^4+\ldots+(2n-1)^4$

15. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m *divide* n se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Este fato é denotado por $m|n$. Prove a veracidade das seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $6|n^3+11n$

(b) $9|4^n+15n-1$

(c) $3^{n+2}|10^{3n}-1$

(d) $7|2^{3n}-1$

(e) $8|3^{2n}+7$

(f) $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$

(g) $171|773^n-602^n$

(h) $424|193^{2n+1}+231^{2n+1}$

(i) $169|3^{3n+3}-26n-27$

16. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > b$. Prove as seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $a-b|a^n-b^n$

(b) $a+b|a^{2n+1}+b^{2n+1}$

(c) $a+b|a^{2n}-b^{2n}$

(d) $2|a^2-a$

(e) $3|a^3-a$

(f) $5|a^5-a$

(g) $7|a^7-a$

(h) $11|a^{11}-a$

(i) $6|7^n-1$

17. Mostre que $1977|931^{547}+1046^{547}$.

18. Ache o erro na *prova* do seguinte *Teorema : Todos os numeros naturais são iguais.*

Demonstração. Vamos provar o resultado mostrando que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é verdadeira a sentença aberta $P(n)$: *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, todos os números naturais menores ou iguais do que* n *são iguais.*

(i) $P(1)$ é claramente verdadeira.

(ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, logo $n-1=n$. Somando 1 a ambos os lados dessa igualdade, obtemos $n=n+1$. Como n era igual a todos os naturais anteriores, segue que $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

✩ Conjuntos finitos e infinitos

19. O conjunto $\mathscr{P}(X)$ das *partes* de um conjunto X dado é definido por

$$\mathscr{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}.$$

Se X é finito e tem n elementos, mostre que $\mathscr{P}(X)$ tem 2^n elementos.

20. Sejam X, Y conjuntos não-vazios finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre, por indução sobre n que o conjunto das funções $f : X \to Y$ tem n^m elementos. Obtenha o resultado do exercício anterior a partir deste.

21. Mostre que se X, Y são conjuntos finitos disjuntos com m e n elementos, respectivamente, então $X \bigcup Y$ tem $m+n$ elementos. Generalize para qualquer quantidade finita de conjuntos finitos.

22. Mostre que se X, Y são conjuntos infinitos enumeráveis então $X \bigcup Y$ é enumerável. (Dica: Use os conjuntos de números pares e ímpares)

23. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere A_k o conjunto dos naturais n que são divisíveis por 2^{k-1} mas não por 2^k. Mostre que:

    (a) $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$;

    (b) $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots = \mathbb{N}$;

    (c) Cada A_j é infinito.

24. Mostre que se $X_1, X_2, \ldots$ são conjuntos enumeráveis então $X_1 \bigcup X_2 \bigcup \ldots$ é enumerável.

25. Dados $m < n$ naturais, determine quantas funções injetoras $f : I_m \to I_n$ existem.

26. Mostre que se existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobrejetora então X é enumerável.

27. Mostre que qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

28. Mostre que um conjunto é infinito se e só se existe um subconjunto próprio $Y \subset X$ e uma bijeção $f : X \to Y$.

29. Mostre que o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ *não* é enumerável.

30. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

31. Se X é finito mostre que uma função $f : X \to X$ é injetora se e só se é sobrejetora.