UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

1. Prove as seguintes propriedades a respeito de números inteiros $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:

    (a) $a + b < a + c$ se e só se $b < c$;

    (b) Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$;

    (c) Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$ então $ac < bd$;

    (d) Se $ab = 1$ então ou $a = b = 1$ ou $a = b = -1$;

    (e) Se $ab = -1$ então ou $a = 1$ e $b = -1$ ou $a = -1$ e $b = 1$;

    (f) $0 \le a^2$;

2. Um subconjunto $X \subset \mathbb{Z}$ diz-se limitado inferiormente (superiormente, respectivamente) se existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \le n$ ($n \le a$ para todo $n \in X$) para todo $n \in X$. Mostre que todo subconjunto de números inteiros limitado inferiormente (superiormente) possui elemento mínimo (máximo).

3. **(Função módulo)** Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos $|n| = n$ se $n \ge 0$ e $|n| = -n$ se $n < 0$. Prove as seguintes propriedades, para todo $n \in \mathbb{N}$:

    (a) $|n| \ge 0$ e $|n| = 0$ se e só se $n = 0$;

    (b) $|mn| = |m||n|$;

    (c) $|m + n| \le |m| + |n|$;

    (d) $|m + n| = |m| + |n|$ se e só se $mn \ge 0$.

4. Prove que $(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} a^j b^{k-j}$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$.

5. Prove que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a^2 + 2$ não é divisível por 4.

6. Prove que o conjunto dos números racionais é enumerável.