

Lista 3

1. Um aluno vê escrito no quadro negro a "igualdade"

$$7 \cdot 8 = 10.$$

Quando vai apagar, ele pára um instante e pensa que talvez esta equação possa estar certa em algum outro sistema de numeração com base diferente de 10. Isto é possível?

2. No quadro negro está escrito um exercício de matemática parcialmente apagado:

$$\begin{array}{r} 23?5? \\ + 1?642 \\ \hline 32423 \end{array}$$

Descubra em qual sistema numérico foram efetuadas as contas e quais são as parcelas ?.

3. Converta os números abaixo do sistema decimal para os sistemas binário, octal e hexadecimal:

- (a) 124
- (b) 2172
- (c) 1977
- (d) 2016
- (e) 2^{2016}

4. Determine procedimentos práticos para converter números do sistema decimal para os sistemas binários, octal e hexadecimal.

5. Converta os números abaixo do sistema binário para o sistema octal e determine um procedimento prático para esta conversão em geral:¹

- (a) $(10001)_2$
- (b) $(101010101)_2$
- (c) $(1111100001)_2$

¹Atenção: não é muito inteligente passar para a base 10 e depois para a base 8...

6. Converta os números abaixo do sistema octal para o sistema binário e determine um procedimento prático para esta conversão em geral:²

(a) $(2335)_8$

(b) $(444326)_8$

(c) $(1726354)_8$

7. Existe algum sistema de numeração no qual cada par de igualdades abaixo é verificada:

(a) $3 + 4 = 10$ e $3 \cdot 4 = 15$

(b) $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 11$

(c) $21 + 12 = 110$ e $21 \cdot 12 = 1022$

(d) $24 + 32 = 100$

8. Efetue na base 3:

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 122112 \\ + 210012 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2221100 \\ - 1012001 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$$

9. Efetue na base 7:

$$\begin{array}{r} 16543 \\ + 33445 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 654321 \\ - 123456 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 531 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 145721 \\ \times 6534 \\ \hline \end{array}$$

10. Estabeleça regras de multiplicação de números nas bases 2,3,4. Generalize.

11. Neste exercício, vamos estudar critérios de paridade/imparidade em uma base qualquer.

① Considere o número $n = (12001121)_3$. Verifique se n é par ou ímpar.

② Verifique que um número $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_3$ é par se e só se a soma $a_0 + a_1 + \dots + a_k$ é par.

③ Enuncie e prove um resultado semelhante para uma base $b > 1$ qualquer.

12. Neste exercício, vamos estudar critérios de divisibilidade em uma base qualquer.

Para iniciar, observe que o critério usual de divisibilidade por 3 e por 9 para números escritos na base 10 decorre simplesmente do fato que $10 \equiv 1 \pmod{9}$. Como $3|9$, decorre também que $10 \equiv 1 \pmod{3}$. Outra situação semelhante ocorre com o critério de divisibilidade por 11: basta observar que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Considerações semelhantes podem ser feitas em uma base qualquer. Para isto, fixemos $b > 1$ uma base inteira qualquer.

① Seja d um divisor de $b - 1$. Mostre que o número $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ é divisível por d se e só se a soma $a_0 + a_1 + \dots + a_k$ é divisível por d . (Análogo aos critérios de divisibilidade por 3 e 9 na base 10)

²Atenção: não é muito inteligente passar para a base 10 e depois para a base 2...

- ② Mostre que o número $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ é divisível por $b + 1$ se e só se a soma $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^k a_k$ é divisível por $b + 1$. (Análogo ao critério de divisibilidade por 11 na base 10)
- ③ Seja d um divisor de $b + 1$. Mostre que o número $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ é divisível por d se e só se a soma $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^k a_k$ é divisível por d . (Como 11 é primo, este critério não tem análogos na base 10)

13. Mônica usou 25 palitos sobre uma mesa e três cartões, um com o número 0, outro com o número 1 e o último com o número 2, para uma brincadeira com seus amigos Ana, Beatriz e Carlos. Sem olhar, ela pede para cada um pegar um cartão e também pede para:

- Ana retirar da mesa tantos palitos quanto o número de seu cartão;
- Beatriz retirar da mesa tantos palitos quanto o triplo do número do seu cartão;
- Carlos retirar da mesa tantos palitos quanto nove vezes o número do seu cartão.

Contando os palitos que restaram sobre a mesa, Mônica tenta acertar quem escolheu cada cartão.

- (a) Quantos palitos restarão sobre a mesa se Ana pegar o cartão com o número 1, Beatriz pegar o cartão com o número 0 e Carlos pegar o cartão com o número 2?
- (b) Qual é a menor quantidade de palitos que pode restar sobre a mesa nessa brincadeira?
- (c) Qual é o número do cartão que Ana pegou, se restaram 14 palitos sobre a mesa?
- (d) Explique por que Mônica sempre pode acertar quem escolheu cada cartão, se ela souber quantos palitos restaram sobre a mesa.