UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. Zeca Eidam

Lista 4

✰ Supremo e ínfimo

1. Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio.

   ① Mostre que, caso existam, $\sup X$ e $\inf X$ são únicos e $\inf X \leq \sup X$.

   ② Admitindo que exista $\max X$, mostre que existe $\sup X$ e $\max X = \sup X$. Prove um resultado análogo para min e inf em lugar de max e sup.

   ③ Encontre uma situação em que existe $\sup X \in \mathbb{R}$ mas não existe $\max X$.

   ④ Encontre uma situação na qual não exista nem $\max X$ nem $\sup X$.

   ⑤ Mostre que se $a \in X$ é uma cota superior (inferior) de X então $a = \sup X$ ($a = \inf X$).

   ⑥ Se X é limitado superiormente então $\sup X = \inf\{c \in \mathbb{R} : \ c \text{ é cota superior de } X\}$. Caso X seja limitado inferiormente, tem-se $\inf X = \sup\{c \in \mathbb{R} : \ c \text{ é cota inferior de } X\}$.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e $a \in \mathbb{R}$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   ① $\inf X = a$

   ② $a \leq x$ para todo $x \in X$ e dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

   Prove uma equivalência análoga para sup em lugar de inf.

3. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um não-vazio ilimitado superiormente (inferiormente), dizemos que $\sup X = \infty$ ($\inf X = -\infty$).

   ① Mostre que $\sup X = \infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $x > A$.

   ② Mostre que $\inf X = -\infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $x < A$.

   Convenciona-se que $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $a > 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ se $a < 0$ e $-\infty < a < \infty$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ não-vazios que admitem supremo e ínfimo e $c \in \mathbb{R}$. Considere os conjuntos $X + Y \doteq \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$, $cX \doteq \{cx : x \in X\}$ e $X \cdot Y \doteq \{xy : x \in X,\ y \in Y\}$.

   ① Mostre que $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ e $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

   ② Mostre que $\sup(cX) = c \sup X$ e $\inf(cX) = c \inf X$ se $c > 0$. O que ocorre se $c < 0$?

   ③ Mostre que $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ e $\inf(X \cup Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$.

   ④ Mostre que se X, Y contém somente elementos positivos, então $\sup(X \cdot Y) = (\sup X)(\sup Y)$ e $\inf(X \cdot Y) = (\inf X)(\inf Y)$.

⑤ Pondo $-X = (-1)X$, mostre que $\sup(-X) = -\inf X$ e $\inf(-X) = -\sup X$.

5. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados não-vazios que admitem sup e inf.

   ① Prove que $\inf Y \leq \inf X$ e $\sup X \leq \sup Y$.

   ② Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y \leq x$. Mostre que $\sup X = \sup Y$.

   ③ Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $x \leq y$. Mostre que $\inf X = \inf Y$.

6. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios que admitem sup e inf. Assuma que para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se $x \leq y$.

   ① Prove que $\sup X \leq \inf Y$.

   ② Prove que $\sup X = \inf Y$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

7. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo dos seguintes conjuntos:

   ① $\left\{\dfrac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   ② $\left\{\dfrac{n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   ③ $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 < 0\right\}$

   ④ $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   ⑤ $\left\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 7\right\}$

   ⑥ $\left\{y \in \mathbb{R} : y = x^6 + 1977x^4 + 1995x^2 - 2016 \text{ para algum } x \in \mathbb{R}\right\}$

8. Mostre, por indução, que qualquer conjunto finito X possui supremo e ínfimo, os quais coincidem com os elementos máximo e mínimo de X, respectivamente.

✫ O corpo dos números reais

9. Assinale V ou F, com justificativas:

   ① O produto de dois números irracionais é sempre irracional.

   ② A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

   ③ A soma de dois números irracionais positivos é sempre irracional.

   ④ Existem a, b números irracionais tais que $a^b \in \mathbb{Q}$.

10. (Desigualdades de Bernoulli) Dado um inteiro positivo n, mostre, por indução, as seguintes desigualdades em $\mathbb{R}$:

    ① Se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

    ② Se $x \neq 0$ então $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.

    ③ Se $a > 0$ e $a + x > 0$ então $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$.

11. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

① $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado.

② Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

③ Dados $\varepsilon > 0$ e $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > A$. (Princípio de Arquimedes)

④ Dados $a > 1$ e $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N > A$.

⑤ Dados $0 < a < 1$ e $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N < \varepsilon$.

12. Prove as seguintes afirmações:

① Dados $x < y$ em $\mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

② Se existe $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r\xi < y$. Em particular, existe $\eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < \eta < y$.

③ Existem infinitos r's satisfazendo ① e ②.

13. Considere o conjunto $\mathbb{Q}(x)$ dos quocientes da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e $q \neq 0$ são polinômios com coeficientes racionais. Nestas circunstâncias, dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)}$ se e só se $p(x)q'(x) = p'(x)q(x)$. Podemos definir operações de soma e produto pelas fórmulas

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)q'(x) + p'(x)q(x)}{q(x)q'(x)}$$

e $\frac{p(x)}{q(x)} \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)p'(x)}{q(x)q'(x)}$.

① Mostre que as operações definidas acima são bem-definidas e tornam $\mathbb{Q}(x)$ um corpo.

② Dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ se os coeficientes dos termos de maior grau de p e q tiverem o mesmo sinal. Mostre que esta definição torna $\mathbb{Q}(t)$ um corpo ordenado.

③ Mostre que para qualquer inteiro positivo n tem-se $n < x$ (Aqui x denota o polinômio $p(x) = x$). Em particular, $\mathbb{Q}(x)$ *não* é arquimediano.

14. Mostre que qualquer intervalo não-degenerado de $\mathbb{R}$ é infinito. Mostre mais: qualquer intervalo não-degenerado de $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

15. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a - b| < \varepsilon$, mostre que $|b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$ e $a < |b| + \varepsilon$.

16. Mostre que $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Conclua que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ para quaisquer $x, y \geq 0$, ou seja a média geométrica é sempre menor ou igual a média aritmética entre dois números.

17. Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

① Prove a *identidade de Lagrange*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k)^2.$$

② Prove a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Mostre que ocorre a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se e somente se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $b_j = \alpha a_j$ ou $a_j = \alpha b_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

③ Prove a *desigualdade de Minkowski*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

18. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

① Todo subconjunto não-vazio limitado superiormente (inferiormente) de $\mathbb{R}$ tem supremo (ínfimo).

② Se $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ é uma sequência de intervalos fechados então $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$.

③ Se $[a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, onde cada I_j é um intervalo aberto, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} I_j$.

④ Se $[a,b] \subset I \cup J$ onde I, J são intervalos abertos disjuntos, então $[a,b] \subset I$ ou $[a,b] \subset J$.

Em particular, as afirmações 2,3,4 são verdadeiras em $\mathbb{R}$.

19. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos $\sup f \doteq \sup f(X)$ e $\inf f \doteq \inf f(X)$; f é dita *limitada* se $-\infty < \inf f \le \sup f < \infty$.

(a) Mostre que $\inf f + \inf g \le \inf(f+g) \le \sup(f+g) \le \sup f + \sup g$.

(b) Mostre que $(\inf f)(\inf g) \le \inf(f \cdot g) \le \sup(f \cdot g) \le (\sup f)(\sup g)$.

(c) Encontre situações em que as desigualdades acima são estritas.

20. Neste exercício, mostraremos a existência de raízes n-ésimas em $\mathbb{R}$. Para tanto, fixemos $a > 0$ e n um inteiro positivo.

① Mostre que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^n < a\}$ é limitado.

② Dado $x \in X$, encontre $C > 0$ dependendo de n e x tal que $(x+\varepsilon)^n < x^n + C\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$.

③ Mostre que X não tem elemento máximo.

④ Use o exercício (10) para mostrar que se $y^n > a$ e $0 < \varepsilon < y$, então $(y-\varepsilon)^n > y^n - ny^{n-1}\varepsilon$. Conclua que o conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \text{ e } y^n > a\}$ não tem elemento mínimo.

⑤ Seja $b = \sup X$. Mostre que b é o único número real positivo tal que $b^n = a$. b é chamado de *raiz n-ésima* de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

⑥ Mostre que se n é *ímpar* e $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. b é único em $\mathbb{R}$ se $a < 0$.

⑦ Mostre que a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é uma bijeção crescente. Mostre que $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

21. Mostre que se $m, n > 1$ são inteiros tais que $m \neq k^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m}$ é irracional.

22. Sejam m, n inteiros positivos tais que $\sqrt{m}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $\sqrt{m} \pm \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

23. Mostre que $\sqrt{2}\sqrt[3]{17}\sqrt[5]{8}$ é irracional.

24. Dados $k > 1$ inteiro e $x > 0$, seja a_1 o maior inteiro menor ou igual a x. Supondo definidos $a_1, \ldots, a_n$, definimos a_{n+1} como o maior inteiro com a propriedade que

$$a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} \le x.$$

① Mostre que $0 \le a_n < k$, para todo $n > 0$.

② Explique geometricamente como obter os números $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

③ Mostre que

$$0 \le x - \left(a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n}\right) < \frac{1}{k^n},$$

para todo $n > 0$. Conclua que

$$x = \sup\left\{a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

A sequência de inteiros $(a_0 a_1 a_2 \ldots)$ é chamada de *expansão de x na base k*.

25. Neste exercício, descreveremos a potenciação com expoentes fracionários e reais. Dados $a > 0$ e m, n inteiros positivos, definimos $a^{1/n} \doteq \sqrt[n]{a}$ e $a^{m/n} \doteq \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

(a) Se $r = m/n \in \mathbb{Q}$ com $m, n > 0$ inteiros, podemos definir $a^r \doteq a^{m/n}$. Mostre que esta é uma boa definição, i.e., independe da representação de r. Estenda esta definição para $r < 0$.

(b) Mostre que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $a^{r+s} = a^r a^s$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$.

(c) Mostre que $(ab)^r = a^r b^r$ para quaisquer $b > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

(d) Prove que $1 < a < b$ se e só se $a^r < b^r$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

(e) Admitindo que $a > 1$, prove que $r < s$ se e só se $a^r < a^s$.

(f) Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, definimos

$$a^x \doteq \sup\{a^r \,:\, r \in \mathbb{Q},\, r < x\}.$$

A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ é chamada de *exponencial de base a*. Mostre que a função exponencial de base a estende a função $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r \in \mathbb{R}$ definida anteriormente e tem as mesmas propriedades que esta.

(g) Mostre que a exponencial de base a é uma função $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ crescente positiva e sobrejetora. Sendo assim, admite uma inversa, chamada de *logaritmo na base a* e denotada por $(0, \infty) \ni x \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$. Estude as propriedades do logaritmo na base a análogas àquelas da função exponencial. Mostre que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção crescente.

26. Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ chama-se *subgrupo aditivo* se for fechado em relação à operação de soma. Seja $G_+ = G \cap (0, \infty)$, e assumamos que $G \neq \emptyset$.

① Se $\inf G_+ = 0$, mostre que G é denso em $\mathbb{R}$.

② Se $\inf G_+ = a > 0$, mostre que $G = \{na \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$.

③ Mostre que para qualquer $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o conjunto formado pelos números da forma $m + n\alpha$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

27. Prove as afirmações a seguir:

① O intervalo $[0,1]$ é não-enumerável.

② O intervalo $(0,1)$ é não-enumerável.

③ $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

④ Qualquer um dos intervalos $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) e $[a,b]$, com $a<b$, é não-enumerável.

⑤ O complemento de qualquer conjunto enumerável é denso.

⑥ O conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ formado pelos números irracionais é não-enumerável.

28. Mostre que $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ dada por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção e calcule sua inversa. Use f para construir uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e um intervalo (a,b) qualquer, com $a<b$.