UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. Zeca Eidam

Treino para a P2

1. Para cada conjunto X abaixo, determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de X. Verifique se X possui elemento máximo e/ou elemento mínimo.
   (a) $X = \left\{ \dfrac{3n+5}{5n+7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
   (b) $X = \left\{ \dfrac{2n-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
   (c) $X = \left\{ y : y = x^4 + x^2 + 1 \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \right\}$

2. Verifique se os números reais abaixo são racionais ou irracionais:
   (a) $\sqrt[4]{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}}$
   (b) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}}$
   (c) $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\sqrt[5]{5}$
   (d) $\cos(\pi/8)$ e $\tan(\pi/8)$ (Use o fato que $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$.)

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e consideremos o conjunto $f(X)$ definido por $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. O *supremo* e o *ínfimo* de f em X são definidos por
$$\sup f \doteq \sup f(X), \ \inf f \doteq \inf f(X).$$
   f é dita *limitada* se $-\infty < \inf f \leq \sup f < \infty$.
   (a) Mostre que $\inf f + \inf g \leq \inf(f+g) \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.
   (b) Mostre que se f, g assumem somente valores não negativos, então $(\inf f)(\inf g) \leq \inf(f \cdot g) \leq \sup(f \cdot g) \leq (\sup f)(\sup g)$.
   (c) Encontre situações em que as desigualdades acima são estritas.

4. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ limitados.
   (a) Suponha que para cada $x \in X$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in Y$ tal que $x - \dfrac{1}{n} < y$. Mostre que $\sup X \leq \sup Y$.
   (b) Suponha $a \in Y$ seja uma cota inferior para X e para Y. Mostre que $\inf Y \leq \inf X$.

5. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ quaisquer.
   (a) Se $a + b\sqrt[3]{7} = c + d\sqrt[3]{7}$, é verdade que $a = c$ e $b = d$? Justifique sua resposta.
   (b) Se $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$, é verdade que $a = c$ e $b = d$? Justifique sua resposta.
   (c) É possível generalizar as afirmações acima? Justifique como.