UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. Zeca Eidam

Lista 6

☆ Sequências de números reais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente. Justifique suas respostas.

(1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ (2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$ (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$

(4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ (5) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$ (6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

(7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ (9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

(10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$ (11) $a_n = \frac{\sin n}{n}$ (12) $a_n = \sin n$

(13) $a_n = \frac{2n+\sin n}{5n+1}$ (14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$ (15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(16) $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ (17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$ (18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

(19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(22) $a_n = n - n^2 \sin\frac{1}{n}$ (23) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $0 < a < b$ (24) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

(25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (26) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\sin(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}}$ (27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (30) $a_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ (33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

(34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

(37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (38) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (39) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

(40) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (41) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$ (42) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

(43) $a_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (44) $a_n = \sqrt[n]{n^4+2012n^3-5}$ (45) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(46) $a_n = \frac{n!^2}{n^{2n}}$ (47) $a_n = \frac{5^n}{2^n+3^n+4^n}$ (48) $a_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$

(49) $a_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$ (50) $a_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (51) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

   (a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ converge para 2.

4. Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}}$.

5. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cada sequência $\{x_n\}$ a seguir, justificando suas respostas:

   (1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (2) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ (3) $x_n = \sqrt[n]{n^4+2011n^3-5}$

   (4) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (5) $x_n = \frac{5^n}{3^n+5^n+7^n}$ (6) $x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$

   (7) $x_n = \sqrt[n]{n!}$ (8) $x_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$ (9) $x_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$

   (10) $x_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (11) $x_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (12) $x_n = \frac{n!}{n^n}$

   (13) $x_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (14) $x_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (15) $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

6. Prove as afirmações abaixo a respeito de um par de sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ de números reais:

   ① $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ para qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}_k$.

   ② Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = c - a$.

   ③ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \neq 0$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{c}$.

   ④ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{c}{a}$.

⑤ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Se k é ímpar, mostre que o resultado vale também para $a > 0$.

⑥ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} {x_n}^r = a^r$.

⑦ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se e só se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

⑧ Se $\lim_{n\to\infty} x_n > a$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \geq N$.

⑨ Se existem $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ e $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$ então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

⑩ Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

7. Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

8. Mostre que se uma sequência monótona tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

9. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

10. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$a \doteq \sup\big\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\big\},$$

$b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $c \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}$.

Mostre que os números a, b, c são bem definidos e $a = b = c$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

11. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.

① Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

② Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

③ Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

12. Neste exercício, vamos estudar as sequências $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

① Mostre por indução que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ e conclua que existe $b = \lim_{n\to\infty} y_n$ e $2 \leq b \leq 3$.

② Use o binômio de Newton para provar que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Conclua que $\{x_n\}$ é uma sequência crescente e $x_n < y_n$ para cada $n \geq 1$. Em particular, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Observe que $a \leq b$.

③ Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $b - \varepsilon < y_N = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!}$. Logo, para qualquer $n \geq N$,

$$x_n \quad > \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{N}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, mostre que $a \geq b$, portanto, $a = b$. Este número é denotado por e.

13. Uma argumentação semelhante àquela feita no exercício anterior pode ser feita com as sequências $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $x > 0$ é um número real fixado. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ existem e são iguais.

14. Sejam $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $x_n y_n \to 1$ e conclua que $x_n \to \frac{1}{e}$.

15. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

16. Seja $\{x_n\}$ uma sequência para a qual existe um número $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

17. Seja $a > 0$ e considere a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_1 = c > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. A constante c é escolhida arbitrariamente.

① Mostre que para todo $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

② Pelo ítem anterior, $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, portanto, $\frac{a}{2x_n x_{n+1}} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

③ Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

④ Use o exercício anterior para mostrar que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$. Calcule este valor.

18. Neste exercício, vamos definir a função exponencial e o logaritmo natural.

① Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^x \doteq \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}.$$

Mostre que esta definição faz sentido e que se $x < y$ então $e^x < e^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,\infty)$ é chamada de *função exponencial* (de base e).

② Mostre que se $\{r_n\}$ é uma sequência crescente de racionais tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Use este fato para mostrar que $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{rx} = (e^x)^r$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

③ Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

④ Usando o teorema do valor intermediário (que será visto em breve), concluímos que a função exponencial é sobrejetora, logo, admite uma inversa, a qual é denotada por $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. A função log é chamada de *logaritmo natural* e também denotada, às vezes, por ln.

⑤ Mostre que $\log 1 = 0$, $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ para todos $x, y > 0$.

⑥ Mostre que $\log(x^r) = r\log x$, para todos $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

⑦ Mostre que $x < y$ implica $\log x < \log y$.

⑧ Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

⑨ Use o binômio de Newton para mostrar que dados quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^k} = +\infty.$$

Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A > 0$ tal que $An^k \leq e^{\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

⑩ Mostre que dado qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existe $C > 0$ tal que $\log n \leq Cn^r$. Em particular, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^r} = 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

19. Vamos usar o exercício anterior para definir potências com expoentes reais quaisquer.

Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = e^{\log a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por

$$a^x \doteq e^{x\log a},$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural. Mostre que:

① $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

② A aplicação $x \mapsto a^x$ é uma bijeção crescente entre $\mathbb{R}$ e $(0,\infty)$ se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

③ A inversa da função exponencial na base a é chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Assim, $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\log_a 1 = 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ para todos $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

④ Mostre que $\log_a(x^y) = y\log_a x$ para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

⑤ Mostre que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.