UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 05/04/2016

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Boa prova!

Questão 1 Prove as afirmações abaixo:

1. **(1,5 ponto)** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^{4n} - 2^{4n}$ é divisível por 53.

VIMOS QUE $a \pm b \mid a^{2n} - b^{2n}$, PARA TODOS $a, b, n \in \mathbb{N}$ $a > b$. TOMANDO $a = 49$, $b = 4$, TEMOS

$$53 = 49 + 4 \mid 49^{2n} - 4^{2n} = 7^{4n} - 2^{4n} \quad //$$

2. **(1,5 ponto)** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{16n} + 7$ é divisível por 8.

TEMOS QUE $3^{16n} = 9^{8n}$ E SABEMOS QUE $8 = 9 - 1 \mid 9^k - 1$ $\therefore$ $9^k - 1 = 8\ell$ p/ ALGUM $\ell \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $\underbrace{9^k = 8\ell + 1}$ p/ ALGUM $\ell \in \mathbb{N}$. DISSO,

$$3^{16n} + 7 = 9^{8n} + 7 = 8\ell + 1 + 7 = 8(\ell + 1)$$

$\therefore$ $8 \mid 3^{16n} + 7$ PARA TODO $n \in \mathbb{N}$. //

3. **(1,5 ponto)** Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n-3$ divide $n^3+2n+25$ se e só se $n = 4k+3$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

$$n^3+2n+25 = (n^3+27)+(2n-2)$$

$$= \underbrace{(n^3+27)}_{(\star)} + \underbrace{2(n-3)}_{(\star\star)} + 4$$

A PARCELA $(\star\star)$ É CLARAMENTE DIVISÍVEL POR $n-3$. A PARCELA $(\star)$ TAMBÉM, POIS $n-3 \mid n^3+3^3 = n^3+27$. LOGO, $n-3 \mid n^3+2n+25$ SE E SÓ SE $n-3 \mid 4$, OU SEJA, $n-3=4k$, i.e., $n=4k+3$, PARA ALGUM $k \in \mathbb{N}$. //

4. **(1,5 ponto)** Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (\Delta)$$

PROVA POR INDUÇÃO:

* $n=1$: $1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^3$.

* ASSUMINDO (Δ) VÁLIDA PARA UM CERTO $n \in \mathbb{N}$, TEMOS QUE

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)(n+1)^2$$

$$= \frac{(n^2+4n+4)(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{2^2} \quad \therefore \ (\Delta) \text{ p/ TODO } n \in \mathbb{N}.$$

Questão 2 **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(n) \geq f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(N) = f(N+1) = f(N+2) = \ldots$. Estime um valor máximo para N.

CONSIDERE X O CONJUNTO IMAGEM DE f, i.e.,

$$X = f(\mathbb{N}) \doteq \{ f(n) / n \in \mathbb{N} \}.$$

COMO $X \neq \phi$, PELO PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO X TEM 1º ELEMENTO, O QUAL CHAMAMOS DE $b \in \mathbb{N}$. COMO $b \in X$, EXISTE $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE $b = f(N)$. PROVEMOS POR INDUÇÃO EM k QUE $f(N) = f(N+k)$, PARA TODO $k \in \mathbb{N}$:

(i) <u>$k=1$</u>: SABEMOS QUE $\overbrace{f(N+1)}^{\in X} \leq f(N) = b$. COMO b É O PRIMEIRO ELEMENTO DE X, ENTÃO $f(N+1) = b = f(N)$.

(ii) <u>PASSO INDUTIVO</u>: SE $f(N) = f(N+k)$ P/ UM CE-TO $k \in \mathbb{N}$, COMO $\underbrace{f(N+k+1)}_{\in X} \leq f(N+k) = f(N) = b$ E b É O 1º ELEMENTO DE X ENTÃO $f(N+k+1) = b = f(N)$. //

$\longrightarrow$