UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 24/05/2016

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Boa prova!

Questão 1 Prove que os números $x \in \mathbb{R}$ descritos abaixo são irracionais (cada ítem vale **1 ponto**):

1. $x = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$(\sqrt{2}x)^2 = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

$2x^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3$

$x^2 = 4 - \sqrt{15}$

$(\sqrt{15})^2 = (4-x^2)^2$

$15 = 16 - 8x^2 + x^4$

$(*)\ \boxed{x^4 - 8x^2 + 1 = 0}$

AS RAÍZES RACIONAIS $\alpha = \frac{p}{q}$ DA EQ. $(*)$ SÃO TAIS QUE $p \mid 1$ E $q \mid 1$ $\therefore$ $\alpha = \pm 1$. MAS $\alpha = \pm 1$ NÃO É RAIZ DE $(*)$ $\therefore$ $(*)$ NÃO ADMITE RAÍZES RACIONAIS, LOGO, $x \notin \mathbb{Q}$. //

2. $x = \sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}$

$x^{12} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^3 = 2^{12}\,3^4$ $\therefore$ $x = \sqrt[12]{2^{12}\,3^4} = 2\sqrt[3]{3}$.

BASTA VER QUE $y = \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$: DE FATO, $y^3 - 3 = 0$, MAS AS RAÍZES DESTA EQUAÇÃO OU SÃO INTEIRAS (O QUE NÃO OCORRE) OU IRRACIONAIS. $\therefore$ $y \notin \mathbb{Q}$. //

3. $x = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2}}$ $\Rightarrow (\sqrt[6]{2}\,x)^6 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^6 \Rightarrow 2x^6 = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$

$\therefore (x^6 - 4)^2 = (\sqrt{15})^2 \Rightarrow x^{12} - 8x^6 + 16 = 15 \Rightarrow \boxed{x^{12} - 16x^6 + 1 = 0}$ (Δ)

AS RAÍZES DE (Δ) NA FORMA $\alpha = p/q$ DEVEM SER TAIS QUE $q \mid 1$ E $p \mid 1$, i.e., $\alpha = \pm 1$, CLARAMENTE, NENHUM DESTES VALORES É RAIZ DE Δ $\therefore$ $x \notin \mathbb{Q}$

Questão 2 **(2 pontos)** Seja

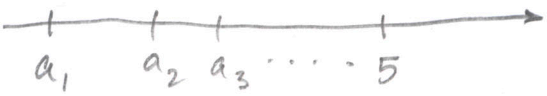
$$X = \left\{ \frac{5n+11}{n+5} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Determine, caso existam, max X, min X, sup X e inf X. Justifique todas as suas respostas.

SEJA $a_n = \dfrac{5n+11}{n+5} = 5 - \dfrac{14}{n+5}$, $n \in \mathbb{N}$. LOGO, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n <$

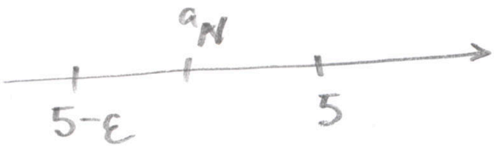
P/ TODO $n \in \mathbb{N}$. DISSO, DECORRE QUE $\min X = a_1 = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$ $\therefore$

$$\inf X = \min X = 8/3.$$



(i) PROVEMOS QUE $\sup X = 5$. DE FATO, COMO $a_n < 5$ P/ TODO $n \in \mathbb{N}$ ENTÃO $c = 5$ É COTA SUPERIOR DE X.

ALÉM DISSO, DADO $\varepsilon > 0$, TOMANDO $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE



$N > \dfrac{14}{\varepsilon} - 5$, TEMOS $\dfrac{14}{N+5} < \varepsilon$ $\therefore$

$a_N = 5 - \dfrac{14}{N+5} > 5 - \varepsilon$. LOGO, $5-\varepsilon$ NÃO É COTA SUPERIOR DE X, P/ QUALQUER $\varepsilon > 0$. ISSO PROVA QU

$\sup X = 5$.

(ii) X NÃO ADMITE ELEMENTO MÁXIMO, POIS ESCOLHID QUALQUER $a_m \in X$, TEMOS QUE $a_{m+1} > a_m$ E $a_{m+1} \in X$. (O ELEMENTO MÁXIMO DEVE PERTE CER AO CONJUNTO). //

Questão 4 Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada e consideremos o conjunto $f(X)$ definido por $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. O *supremo* e o *ínfimo* de f em X são definidos por

$$\sup f \doteq \sup f(X), \ \inf f \doteq \inf f(X).$$

1. **(2 pontos)** Mostre que $\inf f + \inf g \le \inf(f+g) \le \sup(f+g) \le \sup f + \sup g$.

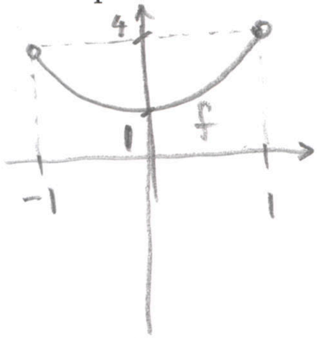
DADO QUALQUER $x \in X$, TEMOS

$$\inf f + \inf g \le (f+g)(x) = f(x) + g(x) \le \sup f + \sup g$$

POR DEFINIÇÃO DE sup, inf, TEMOS

$$\inf f + \inf g \le \inf(f+g) \le \sup(f+g) \le \sup f + \sup g$$

2. **(2 pontos)** Seja $f : \underbrace{(-1,1)}_{= X} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 3x^2$. Determine $\sup f$ e $\inf f$, justificando suas respostas.



TEMOS QUE $f(x) = 1 + 3x^2 \ge 1$, $x \in (-1,1)$.

ALÉM DISSO, $f(0) = 1$ $\therefore$ $\min f(X) = 1$,

LOGO, $\inf f = 1$.

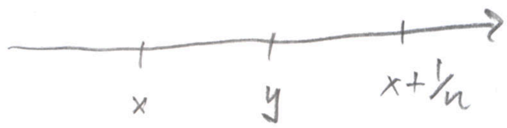
COMO $|x| \le 1$, ENTÃO $f(x) = 1 + 3x^2 \le 1 + 3 = 4$, $x \in X$.

LOGO, $\sup f \le 4$. PARA PROVAR QUE $\sup f = 4$, SEJA $0 < \varepsilon < 1$.

TOMANDO x_0 TAL QUE $\sqrt{1 - 3/\varepsilon} < x_0 < 1$, TEMOS QUE

$1 - \varepsilon/3 < x^2$ $\therefore$ $\underbrace{1 + 3x_0^2}_{= f(x_0)} > 4 - \varepsilon$ $\therefore$ $f(x_0) > 4 - \varepsilon$, LOGO, $\sup f = 4$.

Questão 3 (2 pontos) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ limitados e admita que para cada $x \in X$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in Y$ tal que $y < x + \frac{1}{n}$. Mostre que $\inf Y \leq \inf X$.



DADOS QUAISQUER $x \in X$, $\varepsilon > 0$, SEJA $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\frac{1}{N} < \varepsilon$. POR HIPÓTESE EXISTE $y \in Y$ TAL QUE $y < x + 1/N$ $\therefore$

$$\inf Y \leq y < x + 1/N < x + \varepsilon ,$$

LOGO, $\inf Y - \varepsilon < x$, $x \in X$. POR DEFINIÇÃO DE ÍNFIMO, $\inf Y - \varepsilon \leq \inf X$. COMO $\varepsilon > 0$ É ARBITRÁRIO, TEMOS QUE $\inf Y \leq \inf X$. //