UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM122 - Fundamentos de Análise
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 28/06/2016

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Você pode utilizar sem justificativa todos os resultados vistos em sala de aula;
4. Boa prova!

Questão 1 Verifique se as sequências a seguir convergem e determine o limite daquelas que forem convergentes: (cada ítem vale **1 ponto**):

1. $x_n = \sqrt[n]{2n+13}$

TEMOS QUE $1 \leq 2n+13 \leq 2n+13n = 15n$, $n \in \mathbb{N}$ $\therefore$

$$1 \leq \sqrt[n]{2n+13} \leq \sqrt[n]{15n} = \underbrace{\sqrt[n]{15}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 1}}$$

PELO TEOREMA DO CONFRONTO, $\sqrt[n]{2n+13} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

2. $x_n = \left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{n+1}$ $= \left(\dfrac{(n-1)+5}{n-1}\right)^{n+1}$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{5}{n-1}\right)^{n-1}}_{\substack{\downarrow \\ e^5}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{5}{n-1}\right)^{2}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \xrightarrow{n\to\infty} e^5 \cdot 1 = e^5$$

3. $x_n = \dfrac{n\sin(n^{1977} - 13n)}{n^2 + 11n - 7\cos(n!)}$ $= \underbrace{\sin(n^{1977} - 13n)}_{= a_n} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{n + 11 - 7\dfrac{\cos(n!)}{n}}}_{= b_n}$

TEMOS $\left|\dfrac{\cos(n!)}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \therefore \quad b_n \longrightarrow 0.$

COMO $|a_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, TEMOS QUE $x_n \longrightarrow 0$.

4. $x_n = \dfrac{1^n + 2^n}{2^n + 3^n + 4^n}$

TEMOS QUE $2^n + 3^n + 4^n > 4^n \quad \therefore$

$$0 \leq x_n = \frac{1^n + 2^n}{2^n + 3^n + 4^n} < \frac{1 + 2^n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

PELO TEO. DO CONFRONTO, $x_n \longrightarrow 0$.

Questão 2 Considere a sequência dada indutivamente por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$.

1. **(2 pontos)** Prove que $\{x_n\}$ é uma sequência crescente e $x_n \leq 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROVEMOS POR INDUÇÃO QUE

$$x_n < x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

* $\underline{n=1}$ $\quad x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{2} \quad \therefore$

$x_1 < x_2$

* ASSUMINDO QUE $x_n < x_{n+1}$, VEMOS QUE

$$x_{n+2} = \sqrt{1 + x_{n+1}} > \sqrt{1+x_n} = x_{n+1}.$$

$\therefore \quad x_n < x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

PROVEMOS POR INDUÇÃO QUE

$$x_n \leq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

* $\underline{n=1}$ $\quad x_1 = 1 \leq 3.$

* SE $x_n \leq 3$ ENTÃO

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \leq \sqrt{1+3} = 2 \leq 3.$$

$\therefore \quad x_n \leq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$

LOGO, EXISTE $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$.

2. **(1 ponto)** Determine o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

POR CONTINUIDADE DA FUNÇÃO $x \longmapsto \sqrt{x}$, TEMOS QUE

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+\alpha}$$

$$\therefore \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{OU} \quad \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

COMO $x_n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, TEMOS $\alpha > 0 \quad \therefore \quad \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Questão 3 Prove que as séries abaixo são convergentes (cada ítem vale (**1 ponto**)):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

TESTE DA RAZÃO

$$\frac{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}} = 2 \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= 2 \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ A SÉRIE CONVERGE

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^{2016}+1}$

PODEMOS PROVAR POR INDUÇÃO QUE $n < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\therefore$

$\sqrt[n]{n} < 2$, $n \in \mathbb{N}$. LOGO,

$$0 < \frac{\sqrt[n]{n}}{n^{2016}+1} < \frac{2}{n^{2016}}$$

COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2016}}$ CONVERGE (SÉRIE p COM $p = 2016$), SEGUE PELO CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO QUE A SÉRIE CONVERGE.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{5n+1977}}{\sqrt[3]{n!}}$.

TESTE DA RAZÃO

$$\frac{\frac{2^{5(n+1)+1977}}{\sqrt[3]{(n+1)!}}}{\frac{2^{5n+1977}}{\sqrt[3]{n!}}} = \frac{2^5}{\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt[3]{n!}} \cdot \sqrt[3]{n!} = \frac{2^5}{\sqrt[3]{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

$\therefore$ A SÉRIE CONVERGE.