UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA11 - Números e Funções Reais - PROFMAT
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Rudimentos de Teoria de Conjuntos

Nos exercícios abaixo, $A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ denotam conjuntos quaisquer.

1. Mostre que $A \cup B = B$ se e só se $A \subset B$ se e só se $A \cap B = A$
2. Mostre que
   (a) $B \setminus A = \emptyset$ se, e somente se, $B \subset A$;
   (b) $B \setminus A = B$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$;
   (c) Prove que vale a igualdade $B \setminus A = A \setminus B$ se, e somente se, $A = B$.
   (d) Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
3. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

✰ Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis

4. Se X é finito mostre que uma função $f : X \to X$ é injetora se e só se é sobrejetora.
5. Prove que o conjunto dos números racionais é enumerável.
6. Mostre que se X, Y são conjuntos finitos disjuntos com m e n elementos, respectivamente, então $X \bigcup Y$ tem $m+n$ elementos. Generalize para qualquer quantidade finita de conjuntos finitos.
7. Mostre que se X, Y são conjuntos infinitos enumeráveis então $X \bigcup Y$ é enumerável. (Dica: Use os conjuntos de números pares e ímpares)
8. Dados $m < n$ naturais, determine quantas funções injetoras $f : I_m \to I_n$ existem.
9. Mostre que qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.
10. Mostre que o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to 0, 1$ não é enumerável.
11. Mostre que se $X_1, X_2, \ldots$ são conjuntos enumeráveis então $X_1 \bigcup X_2 \bigcup \ldots$ é enumerável.
12. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

13. O *conjunto das partes* de um conjunto X dado é definido como

$$\mathscr{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}.$$

   (a) Se X é finito e tem n elementos, mostre que $\mathscr{P}(X)$ é finito e tem 2^n elementos.
   (b) Construa uma bijeção entre $\mathscr{P}(X)$ e o conjunto de todas as funções $f : X \to \{0,1\}$.
   (c) Prove que não existe $f : X \to \mathscr{P}(X)$ sobrejetora. (Dica: Se f é uma tal função, seja $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.)

✰ Funções

14. Nas funções seguintes classifique em: injetora; sobrejetora; bijetora; não é nem injetora nem sobrejetora.

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
   (d) $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$
   (e) $p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)
   (f) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$
   (g) $r :: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x|(x - 1)$

15. Para cada uma das funções a seguir, obtenha a expressão para a sua inversa.

   (a) $f(x) = 2x + 3$; (b) $f(x) = ax + b;\ a \neq 0$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; (e) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
   (g) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (h) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ (i) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

16. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$, $x \neq 1$, determinar:

   (a) Sua função inversa f^{-1}
   (b) O conjunto $\mathrm{Im}(f)$.

17. Dada a função $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{4 - x^2}$, $x \geq 0$, pede-se:

   (a) Mostrar que f é injetora.
   (b) Determinar a função inversa f^{-1}.
   (c) Determinar o conjunto $\mathrm{Im}(f)$.

18. Determinar, se existir, a função inversa de cada uma das funções a seguir:

    (a) $f(x) = \sqrt{3x-1}$, onde $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.

    (b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, onde $x \in]-\infty, -2[$.

    (c) $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$, onde $x \in [-2, 1]$.

19. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ |x| & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

verificar se ela é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa.

20. A função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x+2| + |x-1|$ admite inversa?

21. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que:

    (a) f é sobrejetora se, e somente se, existe $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$, $y \in Y$, isto é, f admite uma função inversa à direita.

    (b) f é injetora se, e somente se, existe $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$, $x \in X$, isto é, f admite uma função inversa à esquerda.

    (c) As funções g construídas nos ítens anteriores são únicas? Quando isto pode ocorrer?

22. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

    (a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, para todo $B \subset Y$.

    (b) $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset Y$ se, e somente se, f é sobrejetiva.

    (c) $f^{-1}(f(A)) \supset A$, para todo $A \subset X$.

    (d) $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo $A \subset X$ se, e somente se, f é injetiva.

23. Mostre que existe uma função injetora $f : X \to Y$ se, e somente se, existe uma função sobrejetora $g : Y \to X$.