UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA11 - Números e Funções Reais - PROFMAT
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✰ Equações e inequações

1. Prove que:

   a) $|x| \geq 0$

   b) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$

   c) $|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

   d) $|x - y| \leq |x| + |y|$

   e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

   f) Se $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

   g) Dado $c > 0$, tem-se $|x| > c$ se, e somente se, $x < -c$ ou $x > c$.

2. Resolva as inequações

   a) $|x - 7| < 9$

   b) $|2x + 3| \leq 10$

   c) $|3x - 1| < x$

   d) $|2x^2 + 3x + 3| \leq 3$

   e) $|x - 1| + |x - 3| < 4x$

   f) $\dfrac{1}{|x+1||x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$

3. Dentre os conjuntos a seguir, distingua quais são intervalos, representando-os com as notações adotadas.

   a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 5 - x < 3x - 7\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sqrt{(x+3)^2} = x + 3\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 2| < \dfrac{1}{2} \text{ e } x \leq 2\}$

   e) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{x}{|x|} = 1,\ x \neq 0\}$

   f) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 1| < |4 - x|\}$

4. Se $a > 0$ e b é um número qualquer, mostre que $|x - b| < a$ é equivalente a $b - a < x < b + a$ e também equivalente a $x \in]b - a, b + a[$.

5. Resolva as inequações, expressando a solução em forma de intervalo (quando possível).

a) $|x^2+2x+1|<0$

b) $|(x-2)^2|>0$

c) $x|x+1|>0$ e $x|x+1|<0$

d) $\sqrt{3x^2}>0$

e) $\sqrt{4x^2+12x+9}>2$

f) $\sqrt{2|x|-1}>0$

g) $3|x|+1>0$ e $3|x|+1<0$

h) $\dfrac{3}{x}<5$

i) $\dfrac{2}{x-1}<4$

j) $\dfrac{x}{(3-x)^2}<2$

k) $\dfrac{2}{x}-3<\dfrac{4}{x}+1$

l) $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$

m) $\dfrac{x-3}{x-1}>x-4$

n) $\dfrac{x-2}{x+3}<\dfrac{x+1}{x}$

6. Nos itens a seguir, determine para quais valores de x o trinômio é maior que zero, e para quais valores de x é menor que zero. Para isso, fatore o trinômio (ou complete os quadrados) e estude o sinal. Expresse a resposta na notação de intervalo.

a) x^2-2x-3 b) x^2+x-42 c) $2x^2-x-1$

d) x^2-9 e) $16x^2-2x$ f) x^2+3x

g) x^2+x+1

Observe como resolvemos a letra g). Faça o mesmo para os próximos itens.

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 \qquad \text{(completamos o quadrado)} \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim, $x^2+x+1>0$ se, e somente se, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, isto é, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{4}$. Como $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, a expressão $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{4}$ é válida para todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto, $x^2+x+1>0$ para $x\in]-\infty,+\infty[$. Por outro lado, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<-\frac{3}{4}$ não tem solução, já que o membro esquerdo da desigualdade é um número positivo. Logo a solução para $x^2+x+1<0$ é φ, o conjunto vazio.

h) x^2+1 i) $-x^2$ j) $-x^2+2x-2$

k) x^2+3x+3 l) $2x^2+x+1$ m) x^2+x-1

7. Resolva as desigualdades, expressando a solução na forma de intervalo, quando possível.

a) $x(x-3)(6-x)<0$

b) $\dfrac{(x+1)(2x-3)}{x+5}\geq 0$

c) $|5x|>1$

d) $|3x-4|\geq 2$

e) $\dfrac{|x-1|(x^2-2)}{x-1}>0$

f) $|x-3|>x+1$

g) $\dfrac{(x^2+1)(x^4+1)}{(x^2+2)(x^6+6)}>0$

h) $|x-1|-|x-3|\geq\dfrac{|x-1|}{2}$

i) $\dfrac{6-x-x^2}{(x^2+x+1)(x+4)(x-6)^2}\geq 0$

j) $\dfrac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x^2+3)(2x+1)}\geq 0$

8. Mostre que se $|x-6|<1$ então $|x|<7$.

9. Suponha que $|x-8|<2$ quão grande $|x-5|$ pode ser?

10. Obtenha um número $\delta>0$, tal que se $|x-1|<\delta$ então $|x^2-1|<\dfrac{1}{10}$.

11. Obtenha um número $\delta>0$, tal que se $|x-4|<\delta$ então $|\sqrt{x}-2|<\dfrac{1}{10}$.

✰ Funções do 1º Grau

12. Se $f(x)=4x-3$ mostre que $f(2x)=2f(x)+3$.

13. Se $f(x)=ax$ mostre que $f(x)+f(1-x)=f(1)$ para todo x real. Mostre também que $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2.

14. Encontre a inclinação e a intersecção vertical da reta cuja equação é $2y+5x-8=0$.

15. Em cada item a seguir encontre a equação da reta que passa pelo par de pontos

(a) (3,2) e (-2,4)

(b) (1,1) e (2,-2)

(c) (-3,-3) e (4,9)

(d) (-1,-3) e (-2,5)

(e) (0,0) e (3,2)

(f) (5,0) e (0,5)

(g) (-2,-3) e (5,-7)

(h) $\left(\dfrac{1}{5},2\right)$ e $\left(\dfrac{5}{2},-2\right)$

(i) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

16. Nos itens de (a) a (d) encontre os valores de x para os quais a inclinação da reta ligando os dois pontos dados:

(i) é zero (ii) não existe (iii) é positivo (iv) é negativo

(a) (2,3) e $(x,5)$ (b) (6,-1) e $(3,x)$
(c) $(4,x)$ e $(x,2)$ (d) $(-6,x^2)$ e $(x^2,-2)$

17. Determine se a reta passando pelos dois primeiros pontos é paralela à reta passando pelos dois últimos
   (a) (6,2) e (0,2); (5,1) e (12,10) (b) (-2,-4) e (-4,1); (7,4) e (-3,19)
   (c) (6,-1) e (11,1); (5,-2) e (20,4) (d) (-1,4) e (7,1); (4,2) e (15,-2)

18. Nos itens a seguir encontre a equação da reta que possui inclinação m, e que passa pelo ponto dado.
   (a) $m = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{3},3\right)$ (b) (-2,5), $m = -\frac{2}{3}$
   (c) $m = 1$, $(-4,-3)$ (d) $m = -1$, $(-3,-3)$
   (e) (0,3), $m = -2$ (f) (3,0), $m = 2$
   (g) (-4,3), $m = 0$ (h) (1,-3), $m = 0$

19. Nos itens a seguir determine a inclinação e as intersecções com os eixos x e y das funções definidas pelos gráficos:
   (a) $\{(x,y)\,|\,3x+4y-6=0\}$ (b) $\{(x,y)\,|\,x-2y+4=0\}$
   (c) $\{(x,y)\,|\,-4x+5y+12=0\}$ (d) $\{(x,y)\,|\,2x+y=0\}$

20. O gráfico de uma função linear, f, tem coeficiente angular $m = 2$. Se $(-1,3)$ e $(c,-2)$ pertencem ambos ao gráfico de f, encontre o número c.

21. Nos problemas a seguir, determine o ponto de intersecção das duas retas, se existir, e desenhe os gráficos em cada situação.
   (a) $3x+y-1=0$ e $2x+y-1=0$
   (b) $-2x+3y-6=0$ e $-2x+3y+3=0$
   (c) $-2x+5y+30=0$ e $5x+2y-2=0$
   (d) $-x+y-2=0$ e $x+y-2=0$
   (e) $y-3x=0$ e $y-3x+1=0$
   (f) $y+x+1=0$ e $2y+2x+1=0$

22. (a) Qual a equação da reta que passa pelos pontos $(0,3)$ e $(5,0)$.
   (b) Mostre que a equação da reta que passa pelos pontos $(0,b)$ e $(a,0)$ pode ser escrita na forma (chamada forma *segmentária*):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (a\cdot b\neq 0)$$

23. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2,1)$ e que é perpendicular à reta $y = 5x + 3$.

24. Encontre a equação das retas paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$ e que passa pelo ponto $(1,5)$.

25. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$. Para que valores do domínio a imagem é menor que 4?

26. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

27. O custo de uma plantação é, normalmente, uma função do número de hectares semeado. O custo do equipamento é um *custo fixo*, pois tem que ser pago independentemente do número de hectares plantado. O custo de suprimentos e mão-de-obra varia com o número de hectares plantados e são chamados de *custos variáveis*. Suponha que os custos fixos sejam de R\$ 10.000,00 e os custos variáveis de R\$ 200,00 por hectare. Seja C o custo total, calculado em milhares de reais, e x o número de hectares plantados.

    (a) Encontre uma fórmula para C em função de x.
    (b) Esboce o gráfico de C *versus* x.
    (c) Explique como você pode visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico.

28. Pimentas picantes foram graduadas de acordo com as unidades de Scoville, em que o nível máximo de tolerância humana é de 14.000 Scovilles por prato. O Restaurante Costa Oeste, conhecido por seus pratos picantes, promete um prato especial do dia, que irá satisfazer ao mais ávido aficcionado por pratos apimentados. O restaurante importa pimentas indianas, graduadas em 1.200 Scovilles cada, e pimentas mexicanas, com uma graduação de 900 Scovilles cada.

    (a) Determine a equação de restrição de Scoville, relacionando o número máximo de pimentas indianas e mexicanas que o restaurante deve utilizar na composição do prato especial.
    (b) Resolva a equação da parte (a) obtenha, explicitamente, o número de pimentas indianas usadas nos pratos mais picantes em função do número de pimentas mexicanas.

29. Um corpo de massa m está caindo com velocidade v. A segunda Lei de Newton do Movimento $F = ma$, estabelece que a força resultante, F, com sentido para baixo, é proporcional à sua aceleração, a. A força resultante, F, é composta pela Força de gravidade F_g, que age para baixo, menos a força de resistência do ar F_r, que age para cima. A força devida à gravidade é mg, onde g é uma constante. Suponha que a resistência do ar seja proporcional à velocidade do corpo.

    (a) Obtenha uma expressão para a força resultante F, em função da velocidade v.
    (b) Obtenha uma fórmula, dando a em função de v.
    (c) Esboce o gráfico de a *versus* v.

30. Encontre o comprimento do segmento da reta $3x + 4y = -12$ que está entre as interseções horizontal e vertical.

31. Três operários trabalhando 8 horas por dia, constroem um muro de 30 m em cinco dias. Quantos dias serão necessários para que cinco operários, trabalhando 6 horas por dia, construam um muro de 75 m?

32. Numa fotocopiadora consta a seguinte tabela de preços:

N^o de cópias	preço por cópia
de 1 a 99	0,15
de 100 a 999	0,12
1000 ou mais	0,10

    (a) Qual o custo de 99 cópias?
    (b) Qual o custo de 101 cópias?
    (c) Qual o custo de 999 cópias?
    (d) Qual o custo de 1001 cópias?
    (e) Esboce um gráfico representado o custo C em função do número n de cópias
    (f) Que observações você faz sobre uma regra de preços como a proposta pela tabela acima? Como você corrige a tabela para evitar distorções?

33. Valores correspondentes a p e q são dados na tabela a seguir:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

    (a) Determine q como uma função linear de p.
    (b) Determine p como função linear de q.

34. Uma função linear foi utilizada para gerar os valores da tabela a seguir. Encontre esta função.

x	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
y	27,8	29,2	30,6	32,0	33,4

35. Um carro a 112 km/h necessita de 54 metros para parar. Supondo que a distância, até parar, é proporcional ao quadrado da velocidade, calcule as distâncias, até parar, deste mesmo carro, a velocidades de 56 km/h e 224 km/h.

36. A Lei de Poiseuille fornece a taxa de fluxo, R, de um gás, através de um tubo cilíndrico em função do raio r, do tubo, para uma dada pressão. Assuma uma queda constante de pressão ao longo do restante deste problema.

    (a) Determine uma fórmula para a Lei de Poiseuille, dado que a taxa de fluxo é proporcional à quarta potência do raio.

(b) Se $R = 400$ cm^3/s em um tubo com raio 3 cm, para um certo gás, determine uma fórmula explícita para a taxa de fluxo deste gás, através de um tubo de r centímetros.

(c) Qual a taxa de fluxo do mesmo gás, através de um tubo com raio 5 cm?

✰ Funções Quadráticas

37. Fatore as seguintes expressões quadráticas

(a) $x^2 - 3x$ e $2x^2 + x$

(b) $\pi x^2 + 3\pi$ e $17x^2 + 51x$

(c) $\sqrt{2}x^2 + 2x$ e $\sqrt{\pi}x^2 - \pi$

(d) $x^2 - 9$ e $x^2 - 49$

(e) $x^2 - 3$ e $x^2 - 1$

(f) $x^2 - 2$ e $x^2 - \pi$

(g) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ e $x^2 + x + 6$

(h) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ e $x^2 - x - 6$

(i) $x^2 - 2x + 3$ e $x^2 - 3x - 40$

(j) $3x^2 - 5x - 2$ e $8x + 2x - 1$

(k) $2x^2 - 5bx - 3b^2$ e $x^2 - 4x - 21$

(l) $x^4 - 2x^2 + 1$ e $x^6 - 4x^3 - 21$

38. Utilizando uma calculadora gráfica, ou um computador, estude o comportamento do gráfico de $p(x) = ax^2 + bx + c$ nas seguintes situações:

(a) Dê valores fixos para b e c (por exemplo, $b = 1$ e $c = 2$) e varie a. Fazendo isso, o que acontece com o gráfico de $p(x)$?

(b) Dê valores fixos para a e b (por exemplo, $b = 3$ e $b = 5$) e varie c. Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

(c) Dê valores fixos para a e c (por exemplo, $a = 2$ e $c = 3$) e varie b. Descreva o que acontece com o gráfico de $p(x)$.

39. Observe como fazemos para completar os quadrados das funções $p(x) = x^2 + 2x + 10$ e $q(x) = x^2 - x$.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 2x + 10 \\ p(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 + 10 \\ p(x) &= (x+1)^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - x \\ p(x) &= x^2 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ p(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \\ p(x) &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Utilize essa idéia para completar os quadrados das funções:

(a) $p(x) = x^2 + 5x + 2$

(b) $p(x) = x^2 + 3x + 1$

(c) $p(t) = -3t^2 - 5t + 1$

(d) $p(t) = t^2 - 2t$

(e) $p(x) = x^2 + 3x$

(f) $p(x) = x^2 + 4x - 3$

(g) $p(x) = 4x^2 + 12x + 10$

(h) $p(x) = -16x^2 + 6x$

(i) $p(x) = x^2 + 4b + c$

(j) $p(x) = ax^2 + ax + b$

(k) $p(x) = \pi(x^2 - 2x)$

(l) $p(x) = 24(-x^2 - 3x + 1)$

40. Resolva as seguintes equações completando os quadrados:

(a) $3x^2+6x-1=0$ (b) $3x(3x-2)=6x-5$

(c) $y^2-15y-4=0$ (d) $6u^2+7u-3=0$

(e) $x^2-2x+9=0$ (f) $4z^2-4z-1=0$

(g) $p(2p-4)=5$ (h) $(x-2)^2+3x-5=0$

(i) $(3x-2)^2+(x+1)^2=0$ (j) $5y^2-15y+9=0$

41. Deduza a fórmula para a solução da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$.

42. Use a fórmula para a solução da equação quadrática para resolver as seguintes equações:

(a) $5x^2+6x-1=0$ (b) $2x^2=18x+5$

(c) $x(2x-3)=2x-6$ (d) $6x^2-7x+2=0$

(e) $2x^2=13(x-1)+3$ (f) $2x^2-6x-1=0$

(g) $1200y^2=10y+1$ (h) $x^2+2bx-c^2=0$

(i) $x^2-6ax+3a^2=0$ (j) $\pi u^2+(\pi^2-1)u-\pi=0$

(k) $x(x-\sqrt{2}+4)=4(x+1)$ (l) $3x^2=5(x-1)^2$

43. Determine o valor de b em $B=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq b\}$ de modo que a função $f:\mathbb{R}\to B$ definida por $f(x)=x^2-4x+6$ seja sobrejetora.

44. Determine o maior valor de a em $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq a\}$ de modo que a função $f:A\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

45. Dada a função quadrática $p(x)=ax^2+bx+c$, prove que as coordenadas (x_v,y_v) do vértice da parábola são dadas por

$$x_v=-\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v=-\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta=b^2-4ac$ é o *discriminante* de $p(x)=0$.

46. Determinar os vértices e a imagem das parábolas

(a) $y=4x^2-4$ (b) $y=-x^2+3x$

(c) $y=2x^2-5x+2$ (d) $y=-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(e) $y=-x^2+x-\frac{2}{9}$ (f) $y=x^2-\frac{7}{3}x-2$

47. Qual deve ser o valor de c para que o vértice da parábola $y=x^2-8x+c$ esteja sobre o eixo dos x?

48. Qual deve ser o valor de k para que $y=2x^2-kx+8$ tenha duas raízes reais e iguais?

49. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x+z=8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

50. Dentre todos os números de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

51. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e o vértice que está fora dos eixos pertencente à reta $y=-4x+5$.

52. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços. Um pedaço será usado para formar um círculo, e outro, um quadrado. Onde se deve cortar o arame, para que a soma das áreas das figuras seja a menor possível?

53. Para as seguintes funções f, encontre o discriminante de $f(x)=0$ e determine se as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, ou não existem. Esboce o gráfico de $f(x)$ sem desenhar mais de quatro pontos.

    (a) $f(x)=4x^2-4x+1$ (b) $f(x)=z^2+z+1$

    (c) $f(x)=4x^2-x-5$ (d) $f(x)=7x^2-5x-2$

    (e) $f(x)=x^2-\sqrt{2}x+\dfrac{1}{4}$ (f) $f(x)=x^2-ax-1$

    (g) $f(x)=3x^2+\pi x+4$ (h) $f(x)=x^2-2ax+a^2$

    (i) $f(x)=\sqrt{3}x^2-2x-\sqrt{3}$ (j) $f(x)=9x^2-12x+4$

54. Determine os valores de K para os quais as equações tem raízes reais e iguais.

    (a) $5x^2-4x-(5+K)=0$ (b) $(K+2)x^2+3x+(K+3)=0$

    (c) $x^2+3-K(2x-2)=0$ (d) $(K+2)x^2+5Kx-2=0$

    (e) $x^2-x(2+3K)+7=0$ (f) $(K-1)x^2+2x+(K+1)=0$

55. Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x)=(m-1)x^2+(2m+3)x+m$ tenha dois zeros reais e distintos.

56. Determinar os valores de m para que a equação do segundo grau $(m+2)x^2+(3-2m)x+(m-1)=0$ tenha raízes reais.

57. Determinar os valores de m para que a função $f(x)=mx^2+(m+1)x+(m+1)$ tenha um zero real duplo.

58. Determinar os valores de m para que a equação $mx^2+(2m-1)x+(m-2)=0$ não tenha raízes reais.

59. Prove as *relações de Girard* para equações do segundo grau: se $ax^2+bx+c=0$ possui raízes x_1 e x_2, então $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ e $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

60. Mostre que uma equação do segundo grau que tem x_1 e x_2 como raízes é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

61. Obtenha uma equação do segundo grau que possua as raízes:

(a) 2 e 3 (b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$
(c) $0,4$ e 5 (d) 1 e $-\sqrt{2}$
(e) $1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$

62. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $\mathrm{Im}(f) = [2, +\infty[$.

63. Cada uma das expressões a seguir pode ser escrita na forma $\sqrt{a}\sqrt{c^2 \pm (dx+b)^2}$, sendo que c é uma fração. Observe como fazemos isso para $\sqrt{-4x^2+x}$. Chamando $q(x) = -4x^2 + x$ temos:

$$\begin{aligned}
q(x) &= -4(x^2 - \tfrac{x}{4}) \\
q(x) &= -4\left(x^2 - 2\left(\tfrac{1}{8}\right)x + \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{8}\right)^2\right) \\
q(x) &= -4\left((x-\tfrac{1}{8})^2 - \tfrac{1}{64}\right) \\
q(x) &= 4\left(\tfrac{1}{64} - (x-\tfrac{1}{8})^2\right) \text{ já que } -4 = (-1)\cdot 4 \\
\sqrt{q(x)} &= 2\sqrt{\tfrac{1}{64} - (x-\tfrac{1}{8})^2} \\
\sqrt{q(x)} &= 2\sqrt{\tfrac{1-64(x-\frac{1}{8})^2}{64}} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1-64(x-\tfrac{1}{8})^2} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1-\left(8(x-\tfrac{1}{8})\right)^2} \\
\sqrt{q(x)} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{1-(8x-1)^2}
\end{aligned}$$

Utilize essa idéia nos itens a seguir:

(a) $\sqrt{x^2+3x+1}$ (b) $\sqrt{-3t^2+5t+1}$
(c) $\sqrt{x^2+3x}$ (d) $\sqrt{-16x^2+6x}$.
(e) $\sqrt{-x^2+x+1}$ (f) $\sqrt{-x^2+2x-4}$
(g) $\sqrt{6x-4x^2}$ (h) $\sqrt{4x-x^2}$
(i) $\sqrt{6+x-2x^2}$ (j) $\sqrt{-x^2-2x+8}$
(k) $\sqrt{9x-4x^2}$

64. Dada a função quadrática $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$, prove que:

(a) Se $b > 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte crescente.
(b) Se $b < 0$ o gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos y com a parte decrescente.

65. Considere o Polinômio $f(n) = n^2 + n + 41$. Observe que $f(1) = 43$ é primo, $f(2) = 47$ é primo, $f(3) = 53$ é primo. Será que para todos os números $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ será um número primo? Prove ou “desprove” esta afirmação.

66. Prove que somando-se 1 ao produto de quatro números naturais consecutivos o resultado será sempre um quadrado perfeito.

67. Suponha que a, b e c sejam constantes com $a > 0$. Seja f a função definida por $f(x) = ax^2+bx+c$ com $x \geq \frac{-b}{2a}$. Mostre que a função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac+4ax}}{2a}$ para $x \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$.

68. À medida que a altura referente ao nível do mar aumenta, o peso de um astronauta diminui até atingir a imponderabilidade. Se o peso w do astronauta a altura x km acima do nível do é dado pela expressão $w = p\left(\frac{6400}{x+6400}\right)^2$, onde p é o peso do astronauta ao nível do mar, a que altitude seu peso é inferior a $0,1p$?

69. Se a distância de frenagem d (em metros) de um carro a velocidade de c km/h é dada, aproximadamente, por $d = v + \frac{v^2}{20}$, para quais velocidades o espaço de frenagem é inferior a 20 m?

70. Para que um medicamento faça o efeito desejado a sua concentração na corrente sanguínea deve ser acima do nível terapêutico mínimo. Se a concentração c desse medicamento t horas após ser ingerido é dada por $c = \frac{20t}{t^2+4}$ mg/L e o seu nível terapêutico mínimo é 40 mg/L, determine a partir de que instante esse nível é excedido.

71. Considerando que a resistência elétrica R (em Ohms) para um fio de metal puro está relacionado com a temperatura T (em ºC) pela fórmula $R = R_0(1+\alpha T)$ onde α, R_0 são constantes positivas. Pede-se:

    (a) Para que temperatura tem-se que $R = R_0$

    (b) Se a resistência é considerada 0 para $T = -273°C$, determine o valor de α

    (c) Se a prata tem resistência 1,25 ohms a $0°C$ a que temperatura sua resistência atinge 2,0 ohms?

72. As dosagens para adultos e para crianças devem ser especificadas nos produtos farmacêuticos. Duas das fórmulas para se especificar as dosagens para crianças a partir das dosagens para adultos são a de Cowling, dada por $y=\frac{1}{24}(t+1)\alpha$ e a de Friend, dada por $y = \frac{2}{25}t\alpha$ onde α representa a dosagem para adulto, em mg, e t representa a idade da criança, em anos.

    (a) Se α = 100 mg, represente graficamente as expressões das dosagens infantis usando as fórmulas de Cowling e de Friend.

    (b) Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

73. O IMC (índice de Massa Corporal) é definido como:

$$\varphi = \frac{\text{massa}}{(\text{altura})^2}$$

Uma pessoa é considerada obesa quando o índice é maior que 30. Segundo dados publicados na revista Veja de 12/01/2004, dos obesos brasileiros 13% são mulheres, 7% homens e 15% são crianças. Pelo critério anterior você se considera obeso? A partir de que peso você passaria a ser considerado obeso? A partir de que altura uma pessoa de 100 kg deixa de ser considerada obesa? Uma pessoa de 1,75 m passa a ser considerada obesa a partir de quantos quilos?