

Lista 3

☆ Funções polinomiais

1. Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções polinomiais tal o grau de q é maior que o grau de p . Mostre que existe $A > 0$ tal que $|p(x)| \geq |q(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq A$.
2. Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com $n \geq 1$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
 - (a) Se n é par, determine $A \in \mathbb{R}$ tal que $p(x)$ e a_n têm o mesmo sinal, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq A$.
 - (b) Se n é ímpar, determine $A \in \mathbb{R}$ tal que $p(x)$ e a_n têm o mesmo sinal, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq A$.
3. Determine o menor $M > 0$ tal que $|2x^3 - x^2 + x - 1| \geq M(x^2 + 1)$ para todo $x > 1$.

☆ Funções exponenciais e logarítmicas

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ uma função tal que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
 - (a) Mostre que $f(rx) = f(x)^r$ para todos $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) É verdade que $f(x) = a^x$ para algum $a > 0$?
5. Determine, para $a > 0$:
 - (a) $\log_a(3a^5)$
 - (b) $\log_{(a^2+1)}\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)$
 - (c) $\log_{(\sqrt{a^2+1})}\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)$
 - (d) $e^{a^{\log_a e}}$
6. Faça a atividade 6 da Página 65 do trabalho *Logaritmos*, disponível na página da disciplina, para ter uma ideia do crescimento da função exponencial.

7. Resolva para x :

a) $3^x = 6^{x+3}$

b) $7^x = 2^{2x-1}$

c) $2^{x-1} = 5^{2x+1}$

d) $8^{x+2} = 3^{3x-1}$

e) $y = 2^{3x}$

f) $10y = 10^x$

8. Simplifique o máximo possível as expressões

a) $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$

b) $\log(10^{x+7})$

c) $10^{\log A^2}$

d) $10^{2\log Q}$

e) $10^{-\log P}$

f) $10^{-(\log B)/2}$

g) $\frac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$

h) $2\log \alpha - 3\log B - \frac{\log \alpha}{2}$

9. Resolva para x : (aqui $\log x = \log_{10} x$)

a) $\log(3x - 1) - \log(x + 2) = 2$

b) $\log(x - \sqrt{6}) + \log(x + \sqrt{6}) = 1$

c) $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 1$

d) $\log(x^2 - 4) - 2\log(x - 2) = 2$

10. Sabendo que $a > 0$, simplifique as expressões dadas:

a) $\log_a a^{-x}$

b) $a^{-\log_a x}$

c) $a^{x+\log_a x}$

d) $\log_a (xa^{2x})$

e) $a^{-\log_a x^2}$

f) $a^{\log_a a^x}$

g) $\log_a (a^{\log_a a})$

h) $a^{2\log_a 3}$

i) $\log_a (x^2 a^x)$

j) $\log_a (a^{x^2-2x})$

k) $a^{\log_a (a^x)}$

l) $a^{2\log_a x}$

11. Determine x em cada item:

a) $\log_5 x = 3$

b) $\log_6 x = 3$

c) $\log_2 x = 10$

d) $\log_{10} x = \frac{1}{2}$

e) $\log_{10} x = 1$

f) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

12. Determine a em cada item:

a) $\log_a 216 = 3$

b) $\log_a 625 = 4$

c) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

d) $\log_a \frac{1}{49} = -2$

e) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$

f) $\log_a 125 = 3$

13. Determine y em cada item:

a) $2^{\log_2 y} = 13$

b) $6^{\log_6 y} = 21$

c) $4^{\log_4 y} = 9$

d) $y^{\log_4 6} = 6$

e) $y^{\log_7 14} = 14$

f) $y^{\log_3 2} = 2$

14. Determine x em cada item:

a) $5^{\log_5 7} = x$

b) $3^{\log_x 5} = 5$

c) $10^{\log_x 7} = 7$

d) $k^{\log_k 4} = x$

e) $7^{\log_x k} = k$

f) $8^{\log_8 x} = y$

15. Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.

a) $\ln e + \ln(1/e)$ b) $\ln e^2 + e^{-\ln e}$

c) $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$ d) $e^{-\ln \sqrt{e}}$

16. Simplifique completamente as expressões:

a) $2 \ln A - 3 \ln B + \ln(AB)$ b) $e^{2 \ln A - (\ln B)/2}$

c) $\ln(xe^{-\ln x})$ d) $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$

17. Resolva as equações em x :

a) $2^x = e^{x+1}$ b) $2e^{3x} = 4e^{5x}$

c) $4e^{2x-3} - 5 = e$ d) $10^{x+3} = 5e^{7-x}$