

**Lista 3**

**☆ Funções polinomiais**

1. Sejam  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções polinomiais tal o grau de  $q$  é maior que o grau de  $p$ . Mostre que existe  $A > 0$  tal que  $|p(x)| \geq |q(x)|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \geq A$ .
2. Seja  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial da forma  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , com  $n \geq 1$  e  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Se  $n$  é par, determine  $A \in \mathbb{R}$  tal que  $p(x)$  e  $a_n$  têm o mesmo sinal, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \geq A$ .
  - (b) Se  $n$  é ímpar, determine  $A \in \mathbb{R}$  tal que  $p(x)$  e  $a_n$  têm o mesmo sinal, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \geq A$ .
3. Determine o menor  $M > 0$  tal que  $|2x^3 - x^2 + x - 1| \geq M(x^2 + 1)$  para todo  $x > 1$ .

**☆ Funções exponenciais e logarítmicas**

4. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  uma função tal que  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Mostre que  $f(rx) = f(x)^r$  para todos  $r \in \mathbb{Q}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (b) É verdade que  $f(x) = a^x$  para algum  $a > 0$ ?
5. Determine, para  $a > 0$ :
  - (a)  $\log_a(3a^5)$
  - (b)  $\log_{(a^2+1)}\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)$
  - (c)  $\log_{(\sqrt{a^2+1})}\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)$
  - (d)  $e^{a^{\log_a e}}$
6. Faça a atividade 6 da Página 65 do trabalho *Logaritmos*, disponível na página da disciplina, para ter uma ideia do crescimento da função exponencial.

7. Resolva para  $x$ :

a)  $3^x = 6^{x+3}$       b)  $7^x = 2^{2x-1}$       c)  $2^{x-1} = 5^{2x+1}$   
d)  $8^{x+2} = 3^{3x-1}$       e)  $y = 2^{3x}$       f)  $10y = 10^x$

8. Simplifique o máximo possível as expressões

a)  $\log A^2 + \log B - \log A - \log B^2$       b)  $\log(10^{x+7})$   
c)  $10^{\log A^2}$       d)  $10^{2\log Q}$   
e)  $10^{-\log P}$       f)  $10^{-(\log B)/2}$   
g)  $\frac{\log A^2 - \log A}{\log B - \frac{1}{2}\log B}$       h)  $2\log \alpha - 3\log B - \frac{\log \alpha}{2}$

9. Resolva para  $x$ : (aqui  $\log x = \log_{10} x$ )

a)  $\log(3x - 1) - \log(x + 2) = 2$       b)  $\log(x - \sqrt{6}) + \log(x + \sqrt{6}) = 1$   
c)  $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 1$       d)  $\log(x^2 - 4) - 2\log(x - 2) = 2$

10. Sabendo que  $a > 0$ , simplifique as expressões dadas:

a)  $\log_a a^{-x}$       b)  $a^{-\log_a x}$       c)  $a^{x+\log_a x}$   
d)  $\log_a (xa^{2x})$       e)  $a^{-\log_a x^2}$       f)  $a^{\log_a a^x}$   
g)  $\log_a (a^{\log_a a})$       h)  $a^{2\log_a 3}$       i)  $\log_a (x^2 a^x)$   
j)  $\log_a (a^{x^2-2x})$       k)  $a^{\log_a (a^x)}$       l)  $a^{2\log_a x}$

11. Determine  $x$  em cada item:

a)  $\log_5 x = 3$       b)  $\log_6 x = 3$       c)  $\log_2 x = 10$   
d)  $\log_{10} x = \frac{1}{2}$       e)  $\log_{10} x = 1$       f)  $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

12. Determine  $a$  em cada item:

a)  $\log_a 216 = 3$       b)  $\log_a 625 = 4$       c)  $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$   
d)  $\log_a \frac{1}{49} = -2$       e)  $\log_a 2 = \frac{1}{4}$       f)  $\log_a 125 = 3$

13. Determine  $y$  em cada item:

a)  $2^{\log_2 y} = 13$       b)  $6^{\log_6 y} = 21$       c)  $4^{\log_4 y} = 9$   
d)  $y^{\log_4 6} = 6$       e)  $y^{\log_7 14} = 14$       f)  $y^{\log_3 2} = 2$

14. Determine  $x$  em cada item:

a)  $5^{\log_5 7} = x$       b)  $3^{\log_x 5} = 5$       c)  $10^{\log_x 7} = 7$   
d)  $k^{\log_k 4} = x$       e)  $7^{\log_x k} = k$       f)  $8^{\log_8 x} = y$

15. Efetue as expressões indicadas, simplificando-as o máximo possível.

a)  $\ln e + \ln(1/e)$                       b)  $\ln e^2 + e^{-\ln e}$

c)  $\ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$               d)  $e^{-\ln \sqrt{e}}$

16. Simplifique completamente as expressões:

a)  $2 \ln A - 3 \ln B + \ln(AB)$               b)  $e^{2 \ln A - (\ln B)/2}$

c)  $\ln(xe^{-\ln x})$                               d)  $\ln(e^2 \ln(e \ln e))$

17. Resolva as equações em  $x$ :

a)  $2^x = e^{x+1}$                                   b)  $2e^{3x} = 4e^{5x}$

c)  $4e^{2x-3} - 5 = e$                               d)  $10^{x+3} = 5e^{7-x}$