

Lista 4

☆ Funções trigonométricas

1. (ENQ 2015/2) Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $(1 - \cos^2 x)^{\cos(3x - \frac{\pi}{4})} = 1$.

2. Prove que

$$(a) \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$(b) \operatorname{sen}(4x) = 4(\operatorname{sen} x \cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x \cos x)$$

$$(c) \operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(d) \operatorname{cotg}(2x) = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x)$$

$$(e) \operatorname{cotg}(x/2) = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cossec} x$$

$$(f) \operatorname{sec}(2x) = \frac{1}{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$$

$$(g) \operatorname{cossec}(x + y) = \frac{\operatorname{sec} y}{\operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{tg} y}$$

$$(h) |\operatorname{sec} x + \operatorname{tg} x| = \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right|$$

$$(i) \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x} = 1 + \cos x$$

3. Determine os valores abaixo:

$$(a) \operatorname{sen}(1977\pi + \pi/4)$$

$$(b) \operatorname{sen}(22,5^\circ)$$

$$(c) \operatorname{cotg}(\pi/12)$$

$$(d) \operatorname{sec}(\pi/4)$$

$$(e) \operatorname{cotg}(15^\circ)$$

$$(f) \operatorname{cossec}(\pi/12)$$

$$(g) \cos(15^\circ)$$

4. Mostre que $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$

5. Mostre que $|\sec x| \geq 1$ para todo $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$.

6. Determine fórmulas para $\sin(x/2)$ e $\cos(x/2)$.

7. Determine o domínio e os zeros das funções abaixo:

(a) $f(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$

(b) $f(x) = \sec x + \operatorname{cotg} x$

(c) $f(x) = \frac{3\operatorname{sen} x + 2\operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$

8. Mostre que, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, vale

$$-3 \leq \cos^2 x - 4\operatorname{sen} x \leq 5.$$

(Dica: Resista à tentação de somente testar valores conhecidos, isso não serve aqui... Substitua $\cos^2 x$ e use seus conhecimentos sobre funções quadráticas.)