UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA11 - Números e Funções Reais (PROFMAT)
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 23/06/2016

Nome: ____

GRR: __________________ **Assinatura:** __________________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Boa prova!

Questão 1 Um fabricante de tijolos do Umbará (o melhor bairro de Curitiba) tem um custo fixo semanal em sua olaria de 700 reais por semana, sendo que, para cada milheiro de tijolos produzido, descontados os impostos, ele lucra 43 reais.

1. **(1 ponto)** Determine uma função do primeiro grau que caracteriza o lucro semanal da olaria em função de sua produção de tijolos.

$$F(x) = 43x - 700$$

2. **(0,5 ponto)** Quantos tijolos ele deve produzir, no mínimo, para que seu lucro seja positivo?

$$F(x) = 43x - 700 > 0$$

$$\therefore \quad x > \frac{700}{43} \simeq 16,27$$

LOGO, ELE DEVE PRODUZIR PELO MENOS 16.270 TIJOLOS.

Questão 2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 - 10x + 9$.

1. **(1 ponto)** Determine a imagem de f

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-28}{8} = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Im}\, f = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

2. **(1,5 ponto)** Considere $h : [5/2, \infty) \to [\alpha, \infty)$ dada por $h(x) = 2x^2 - 10x + 9$. Calcule o valor de α para que h seja bijetora e determine a inversa.

COMO $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$, ENTÃO h É BIJETORA SE E SÓ SE $\alpha = y_v = -7/2$. SUA INVERSA É OBTIDA RESOLVENDO EM x A EQUAÇÃO

$$2x^2 - 10x + 9 = y \Rightarrow x = \frac{10 + \sqrt{28 + 8y}}{4} = \frac{5 + \sqrt{7 + 2y}}{2}$$

LOGO, $h^{-1}(y) = \frac{5 + \sqrt{7 + 2y}}{2}$, $y > -\frac{7}{2}$.

Questão 3 **(2 pontos)** Dada uma função $f : X \to Y$ e subconjuntos $A \subset X$, $B \subset Y$, definimos

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \text{ e } f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

1. **(1 ponto)** Prove que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ e $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ para quaisquer subconjuntos $A_1, A_2 \subset X$ e $B_1, B_2 \subset Y$.

PROVEMOS QUE $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$:

SE $y \in f(A_1 \cup A_2)$ ENTÃO EXISTE $x \in A_1 \cup A_2$ TAL QUE $f(x) = y$.
SE $x \in A_1$ ENTÃO $y \in f(A_1)$; SE $x \in A_2$ ENTÃO $y \in f(A_2)$
$\therefore$ $y \in f(A_1 \cup A_2)$. RECIPROCAMENTE, SE $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$
ENTÃO $y \in f(A_1)$ OU $y \in f(A_2)$; NO PRIMEIRO CASO,
$y = f(x_1)$ P/ ALGUM $x_1 \in A_1$, NO SEGUNDO CASO $y = f(x_2)$
P/ ALGUM $x_2 \in A_2$. EM QUALQUER DOS CASOS, $y = f(x)$ P/
ALGUM $x \in A_1 \cup A_2$ $\therefore$ $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$\longrightarrow$

2. **(1 ponto)** Prove que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ e $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ para quaisquer subconjuntos $A_1, A_2 \subset X$ e $B_1, B_2 \subset Y$. Encontre um exemplo em que a segunda inclusão seja estrita (não uma igualdade).

$\rightarrow$ $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1$ E $f(x) \in B_2 \Leftrightarrow$
$x \in f^{-1}(B_1)$ E $x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$\rightarrow$ $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow y = f(x)$ P/ ALGUM $x \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow$
$y = f(x_1)$ P/ ALGUM $x \in A_1$ E $x \in A_2 \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

EXEMPLO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, \infty)$
$\therefore$ $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, LOGO $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$ E
$f(A_1) = [0, \infty)$, $f(A_2) = [0, \infty)$ $\therefore$ $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, \infty)$
$\therefore$ $f(A_1 \cap A_2) = \{0\} \subsetneq [0, \infty) = f(A_1) \cap f(A_2)$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

DE FATO,

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \quad //
\end{aligned}$$

3. **(1,5 ponto)** Considere $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. Determine $f^{-1}((0,1))$.

$$x \in f^{-1}((0,1)) \iff 0 < f(x) < 1 \iff \underbrace{0 < \frac{x-1}{x^2} < 1}_{\star}$$

$$* \quad \frac{x-1}{x^2} > 0 \iff x > 1$$

$$* \quad \frac{x-1}{x^2} < 1 \iff \frac{x-1-x^2}{\underbrace{x^2}_{>0}} < 0 \iff -x^2+x-1 < 0$$

$\iff x^2 - x + 1 > 0$: COMO $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, SEGUE QUE $x^2 - x + 1 > 0$ P/ TODO x. LOGO, $\star$ É VERIFICADA EXATAMENTE NO CONJUNTO $(1, \infty)$, OU SEJA, $f^{-1}((0,1)) = (1, \infty)$.

Questão 4 Determine o conjunto solução das desigualdades abaixo:

1. **(1 ponto)** $\dfrac{x^5+x^4+x^3}{x^8-1} > 0$

$$\frac{x^3(x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^4-1)} = \frac{x^3(x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)} = \underbrace{\frac{x^2+x+1}{(x^4+1)(x^2+1)}}_{\text{SEMPRE } >0} \cdot \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} > 0$$

x^3: $- \; - \; -$ (0) $+ \; + \; + \; +$

$x+1$: $- \; -$ (−1) $+ \; + \; + \; +$

$x-1$: $- \; - \; - \; - \; -$ (1) $+ \; + \; +$

$\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)} > 0$: $- - -$ (−1) $+ +$ (0) $- - -$ (1) $+ + +$

$\therefore \; S = (-1,0) \cup (1,\infty).$

2. **(1,5 ponto)** $\dfrac{x-1}{x-2} < \dfrac{x-3}{|x|}$

(i) $x>0$: $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{x^2-x-x^2+5x-6}{x(x-2)} = \dfrac{4x-6}{x(x-2)} < 0$

(ii) $x<0$: $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{2(x^2-3x+3)}{x(x-2)}$

EM (i)

$4x-6$: (0) $- \; - \; -$ ($3/2$) $+ \; + \; + \; + \; +$

$x-2$: (0) $- \; - \; - \; -$ (2) $+ \; +$

$\dfrac{4x-6}{x(x-2)}$: (0) $+ + +$ ($3/2$) $- -$ (2) $+ + + +$

EM (ii) : $x^2-3x+3>0$, $x \in \mathbb{R}$, POIS $\Delta = 9-12 = -3 < 0$

x: $- \; - \; - \; - \; -$ (0)

$x-2$: $- \; - \; - \; - \; -$ (0)

$\dfrac{2(x^2-3x+3)}{x(x-2)}$: $+ \; + \; + \; + \; +$ (0)

$\therefore$

$S = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$