UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA11 - Números e Funções Reais (PROFMAT)
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 04/08/2016

Nome: ______________________________

GRR: ______________ Assinatura: ______________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Boa prova!

Questão 1 Considere as funções polinomiais $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e $q(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. **(1 ponto)** Determine funções polinomiais Q, r tais que $p = qQ + r$, sendo que o grau de r é menor que 2. Q, r são únicas?

$$x^3+x^2-x+1 = (x^2+1)\underbrace{(x+1)}_{Q(x)}\overbrace{-2x}^{r(x)}$$

Q, r SÃO ÚNICAS PELA UNICIDADE NO ALGORITMO DA DIVISÃO.

2. **(1 ponto)** Determine o conjunto solução da desigualdade

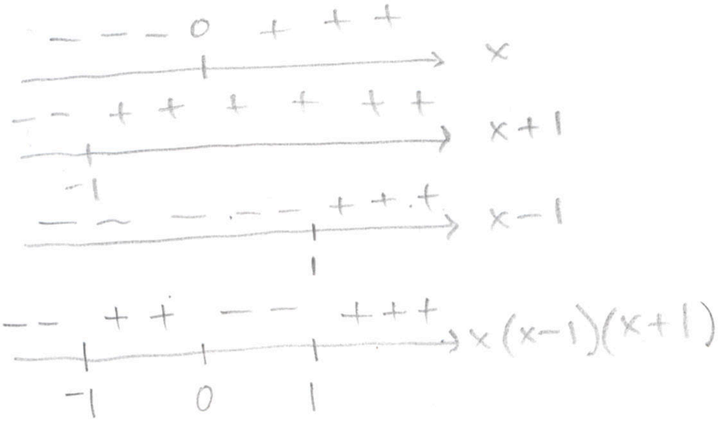
$$\frac{p(x)}{q(x)} > 1.$$

$$\frac{x^3+x^2-x+1}{x^2+1} > 1 \iff x^3+x^2-x+1 > x^2+1$$

$x^2+1 > 0$

$$\iff x^3 - x > 0$$

$$\iff x(x+1)(x-1) > 0$$



$$\iff x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$$

$$\therefore S = (-1,0) \cup (1,\infty)$$

Questão 2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *não-identicamente nula* tal que

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) \tag{1}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

1. **(1 ponto)** Mostre que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2^{-1}$ e $f(nx) = 2^{n-1} f(x)^n$ $(\star)$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ $f(0) = f(0+0) = 2f(0)f(0)$ $\therefore$ $f(0)\big(1 - 2f(0)\big) = 0$; COMO $f(0)>$

ENTÃO $f(0) = 1/2$.

$\rightarrow$ PROVEMOS $(\star)$ POR INDUÇÃO EM n:

$\underline{n=1}$ OK

$\underline{\text{P. INDUTIVO}}$ SE $(\star)$ VALE P/ UM CERTO n, ENTÃO

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = 2f(nx)f(x) = 2 \cdot 2^{n-1} f(x)^n \cdot f(x)$$
$$= 2^{(n+1)-1} f(x)^{n+1}.$$

2. **(1 ponto)** Mostre que $f(nx) = 2^{n-1} f(x)^n$ para todos $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

TEMOS $\frac{1}{2} = f(0) = f(x-x) = 2f(x)f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{4} f(x)^{-1}$
$= 2^{-2} f(x)^{-1}$

$\therefore$ DADO $n \in \mathbb{N}$, TEMOS

$$f(-nx) = 2^{-2} f(nx)^{-1} = 2^{-2}\left(2^{n-1} f(x)^n\right)^{-1}$$
$$= 2^{-n-1} f(x)^{-n}.$$

3. **(1,5 ponto)** Mostre que $f(rx) = 2^{r-1}f(x)^r$ para todos $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$. (Dica: Se $r = m/n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, comece desenvolvendo a expressão $f(rx)^n$.)

$$f(rx)^n = f\left(\frac{m}{n}x\right)^n = \frac{f\left(n \cdot \frac{m}{n}x\right)}{2^{n-1}} = \frac{f(mx)}{2^{n-1}} = \frac{2^{m-1}f(x)^m}{2^{n-1}} = 2^{m-n}f($$

COMO $f(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}$, TEMOS, ELEVANDO AMBOS OS MEMBRO A $1/n$

$$f(rx)^{m/n} = 2^{m/n - 1} f(x)^{m/n}.$$

4. **(1,5 ponto)** Mostre que para cada $a > 0$ dado, a função $g(x) = 2^{x-1}a^x$, $x \in \mathbb{R}$, satisfaz a identidade (1). Conclua que se uma função *contínua* f satisfaz a identidade (1) então existe $a > 0$ tal que $f(x) = 2^{x-1}a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x+y) = 2^{x+y-1}a^{x+y} = \left(2^{x-1}a^x\right)\left(2^{y-1}a^y\right) \cdot 2 = 2g(x)g($$

DADA f CONTÍNUA SATISFAZENDO (1), SEJA $a \doteq f(1)$.

POR (1), (2), (3), TEMOS $f(x) \overset{\Delta}{=} 2^{x-1}a^x$, P/ TODO $x \in \mathbb{Q}$. COMO AMBOS OS MEMBROS DE Δ SÃO FUNÇÕES CONTÍNUAS EM x E COINCIDEM NO CONJUNTO DENSO $\mathbb{Q}$, SEGUE QUE $f(x) = 2^{x-1}a^x$, P/ TODO $x \in \mathbb{R}$.

Questão 3 Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras **(V)** ou falsas **(F)**, provando as verdadeiras e exibindo um contra-exemplo para as falsas (cada ítem vale **(1 ponto)**):

① Para todos $a, b, c > 0$ vale a igualdade $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

VERDADEIRO

$$a^{\log_b c} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_b c}$$

$$= c^{\log_c a \log_b c}$$

$$= c^{\log_b a}.$$

② O conjunto solução da inequação

$$3^{2x} < \frac{5^{x+1}}{2^x}$$

é o intervalo $(\log_5 18, \infty)$.

FALSO

$$3^{2x} < \frac{5^{x+1}}{2^x} \iff 18^x < 5^{x+1}$$

$$\iff x \log_5 18 < x + 1$$

$$x(\underbrace{\log_5 18 - 1}_{>0}) < 1$$

$$x < \frac{1}{\log_5 18 - 1} = \frac{1}{\log_5(18/5)} = \log_{18}$$

$$\therefore \; S = (-\infty, \log_{18/5}(5))$$

③ Para todos $a, b > 0$ vale a igualdade $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

VERDADEIRO

$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1 \quad \therefore \quad \log_a b = \dfrac{1}{\log_a b}$.

④ A equação

$$4^{x^3-4x} = e^{x-2}$$

tem exatamente *duas* raízes reais, a saber, $x_1 = -1 + \sqrt{\log_3(3/e)}$ e $x_2 = -1 - \sqrt{\log_3(3/e)}$.

FALSO $\quad x = 2$ TAMBÉM É RAIZ.