UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
MA11 - Números e Funções Reais (PROFMAT)
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 18/08/2016

Nome: ____

GRR: ____________________ Assinatura: ____________________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas;
2. Faça a prova a lápis;
3. Boa prova!

Questão 1 Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{3\sec^2 x - 4}.$$

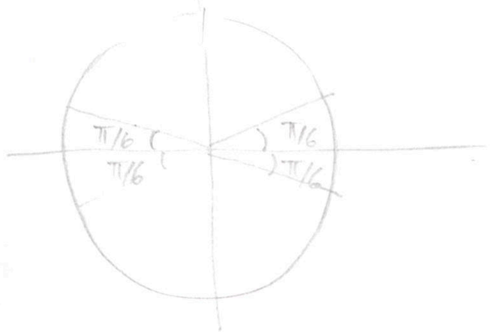
1. **(1 ponto)** Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ para o qual f está definida.

$3\sec^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \sec x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \; k \in \mathbb{Z} \;\therefore$

DOMÍNIO DA SECANTE

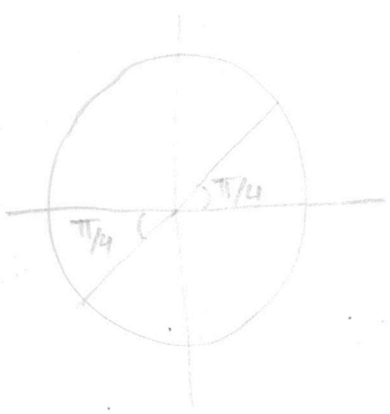
$D = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ p/ TODO $k \in \mathbb{Z}$ E $x \neq \ell\pi + \frac{\pi}{2}, \; \ell \in \mathbb{Z} \}$



2. **(1 ponto)** Determine os zeros da função f, se existirem.

$f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 2\operatorname{sen}^2 x$

$\therefore \operatorname{sen} x = \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{x = k\pi + \pi/4}, \; k \in \mathbb{Z}$



Questão 2 Prove as seguintes identidades:

1. **(1 ponto)** $\sec^2(x/2) = \dfrac{2\operatorname{cossec} x}{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x}$

$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2} \quad \therefore$$

$$\sec^2(x/2) = \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2/\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)/\operatorname{sen} x} = \frac{2\operatorname{cossec} x}{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x}$$

2. **(2 pontos)** $\operatorname{sen}(4x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(2x)\underbrace{(\operatorname{cossec}^2 x - \sec^2 x)}_{(\star)}$

$$(\star)\ \operatorname{cossec}^2 x - \sec^2 x = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(\operatorname{sen} x \cos x)^2} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x}$$

$$\operatorname{sen}(4x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$$

$$= 2\operatorname{sen} 2x \cdot \underbrace{\frac{\cos(2x)}{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)}}_{(\star)} \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\cancel{2}x)\left(\operatorname{cossec}^2 x - \sec^2 x\right)\cdot \operatorname{sen}^2(2x)$$

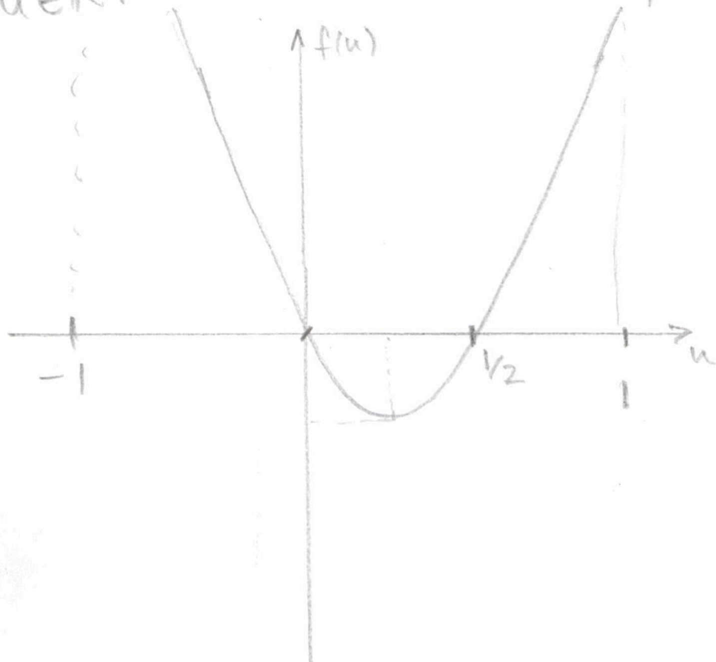
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(2x)\left(\operatorname{cossec}^2 x - \sec^2 x\right).$$

Questão 3 **(2 pontos)** Mostre que

$$-\frac{1}{8} \leq 2\cos^2\theta - \cos\theta \leq 3,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

SEJA $u = u(\theta) = \cos\theta$ E CONSIDEREMOS $f(u) = 2u^2 - u$, $u \in \mathbb{R}$. O GRÁFICO DE f É, COM $x_v = \frac{1}{4}$, $y_v = -\frac{1}{8}$



COMO $-1 \leq u \leq 1$, POIS $u = \cos\theta$, ENTÃO PRECISAMOS ANALISAR f SOMENTE NO INTERVALO $[-1, 1]$. COMO $f(-1) = 2+1 = 3$ E $f(1) = 1$, SEGUE QUE $-\frac{1}{8} \leq f(u) \leq 3$, SE $-1 \leq u \leq 1$ $\therefore$

$$-\frac{1}{8} \leq 2\cos^2\theta - \cos\theta \leq 3, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Questão 4 Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras **(V)** ou falsas **(F)**, provando as verdadeiras e exibindo um contra-exemplo para as falsas (cada ítem vale **(1,5 pontos)**):

① O conjunto solução da equação

$$\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$$

é

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$u = \mathrm{tg}\, x$: $u^3 - u^2 - 3u + 3 = 0 \Rightarrow (u-1)(u^2-3) = 0$ $\therefore$

$u = 1$ ou $u = \pm\sqrt{3}$ $\therefore$ $u = k\pi + \pi/4$ ou $u = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

$k \in \mathbb{Z}$.

FALSO

② $\mathrm{cotg}\,(\pi/8) - \mathrm{cossec}\,(\pi/8) = 1 + \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

$\mathrm{sen}(\pi/8) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi/4}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos \pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

$\cos(\pi/8) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 \pi/8} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

$\therefore$ $\mathrm{cossec}(\pi/8) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$, $\mathrm{cotg}(\pi/8) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2}+1$

$\therefore$ $\mathrm{cotg}(\pi/8) - \mathrm{cossec}(\pi/8) = 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\;}}$. // VERDADEIRO