

Lista 1

1. A *diferença simétrica* entre os conjuntos X e Y é definida como

$$X \Delta Y \doteq (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Prove que:

- (a) $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$;
- (b) $X \Delta Y = Y \Delta X$;
- (c) $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$;
- (d) $X \Delta X = \emptyset$;
- (e) $X \Delta \emptyset = X$;
- (f) $X \cup Y = (X \Delta Y) \Delta (X \cap Y)$;
- (g) $(X \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z) = X \Delta Z$;
- (h) $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$;
- (i) $X \Delta Y = X^c \Delta Y^c$;
- (j) Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função e $A, B \subset Y$ então $f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

2. Construa uma bijeção entre $(X^Y)^Z$ e $X^{Y \times Z}$.

3. Construa uma bijeção entre $X^{\mathbb{N}}$ e $(X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Interprete este resultado.

4. Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos. Às vezes, pedir que um ponto pertença *a todos os* X_n é muito; dualmente, há situações em que pedir que um ponto pertença *a algum* X_n é pouco demais. Uma maneira de sanar isto é com os conjuntos abaixo definidos:

$$\liminf X_n \doteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} X_n, \quad \limsup X_n \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} X_n.$$

- (a) Interprete exatamente o que significam as afirmações $x \in \liminf X_n$ e $x \in \limsup X_n$.
- (b) Mostre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

- (c) Dizemos que $\{X_n\}$ converge para X se $\liminf X_n = \limsup X_n = X$. Mostre que se $\{X_n\}$ é *monótona*, i.e., ou $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ ou $X_1 \supset X_2 \supset \dots$, então $\{X_n\}$ converge. Determine o limite em cada caso.

5. Seja $\{X_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ uma família bi-indexada de conjuntos. Existe alguma relação de inclusão ou igualdade entre os conjuntos

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{mn} \text{ e } \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{mn} ?$$

Encontre contraexemplos para as inclusões falsas.

6. Sejam $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ e $\{Y_{\beta}\}_{\beta \in B}$ famílias de conjuntos. Mostre que:

$$(a) \left(\bigcup_{\alpha} X_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta} Y_{\beta} \right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in \times B} X_{\alpha} \times Y_{\beta}$$

$$(b) \left(\bigcap_{\alpha} X_{\alpha} \right) \times \left(\bigcap_{\beta} Y_{\beta} \right) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in \times B} X_{\alpha} \times Y_{\beta}$$

$$(c) \left(\bigcup_{\alpha} X_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta} Y_{\beta} \right) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in \times B} X_{\alpha} \cap Y_{\beta}$$