

Lista 1

☆ **Polinômio de Taylor**

1. Calcule o polinômio de Taylor de f de grau n no ponto x_0 indicado:

- (1) $f(x) = e^x, x_0 = 0$ (2) $f(x) = e^x, x_0 = 1$ (3) $f(x) = \text{sen } x, x_0 = 0$
 (4) $f(x) = \cos x, x_0 = 0$ (5) $f(x) = \cos x, x_0 = -1$ (6) $f(x) = \arctan x, x_0 = 0$
 (7) $f(x) = \ln(1+x), x_0 = 0$ (8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x_0 = 0$ (9) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3, x_0 = 1$
 (10) $f(x) = \sinh x, x_0 = 0$ (11) $f(x) = \cosh x, x_0 = 0$ (12) $f(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 = 0$
 (13) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 0$ (14) $f(x) = x \ln(1+x), x_0 = 0$ (15) $f(x) = \cos^2 x, x_0 = 0$

2. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 e a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para calcular um valor aproximado para cada um dos números abaixo, estimando o erro:

- (a) $\ln(1,01)$ (b) $\text{sen}(-0,01)$ (c) $\tan(-0,1)$ (d) $\sqrt[4]{16,1}$ (e) $\sqrt{8,97}$
 (f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0,05\right)$ (g) $e^{0,07}$ (h) $\arctan(0,09)$ (i) $\ln(1,001)$ (j) $\cosh(-0,1)$

3. Use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar as igualdades abaixo:

- (a) $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$ (b) $\text{sen } x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$
 (c) $\cos x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln(1+x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, |x| < 1$
 (e) $\arctan x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$ (f) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=0}^N \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1$

4. Utilizando o exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

- (a) e , com erro inferior a 10^{-5} (b) $\text{sen } 1$, com erro inferior a 10^{-7}
 (c) $\cos 1$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}
 (e) e^2 , com erro inferior a 10^{-5} (f) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}
 (g) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5} (h) $\cos(1/2)$, com erro inferior a 10^{-5}

5. Calcule $\frac{d^{320} \arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321} \arctan}{dx^{321}}(0)$

6. Estime as integrais abaixo:

(a) $\int_0^1 \sin(t^2) dt$, com erro inferior a 10^{-5} (b) $\int_0^1 e^{t^3} dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\int_0^1 \ln(1+t^4) dt$, com erro inferior a 10^{-2} (d) $\int_0^1 e^{-t^2} dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(e) $\int_{-1}^1 \frac{\sin t}{t} dt$, com erro inferior a 10^{-6} (d) $\int_0^1 \frac{1 - \cos(t^2)}{t} dt$, com erro inferior a 10^{-7}

7. Utilizando os polinômios de Taylor das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^5}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$

☆ Curvas

8. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

- | | |
|---|---|
| (1) $\gamma(t) = (1, t)$ | (2) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ |
| (3) $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$ | (4) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\sin t)$ |
| (5) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}, 1 - t\right)$ | (6) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \geq 0$ |
| (7) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ | (8) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2\sin t)$ |
| (9) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt{t})$, $t \geq 1$ | (10) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$ |
| (11) $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 \cos t - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ | (12) $\gamma(t) = (1 - t^2, 2t^3 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$ |
| (13) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$ | (14) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$ |
| (15) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$ | (16) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$ |
| (17) $\gamma(t) = (\ln(1 + t^2), t^3 - 3t)$ | (18) $\gamma(t) = (t(t^4 - 1), t^4 - 1)$ |
| (19) $\gamma(t) = (t^2 - 2t, t^3 - 3t + 1)$ | (20) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt[3]{t})$, $t > 0$ |
| (21) $\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$ | (22) $\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ |
| (23) $\gamma(t) = (t^3 - 12t, t^2 - 2t)$ | (24) $\gamma(t) = (2t - 4t^3, 3t^4 - t^2)$ |
| (25) $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$ | (26) $\gamma(t) = (2\cotg t, 2\sin^2 t)$ |
| (27) $\gamma(t) = (2\sin^2 t, 2\sin^2 t \tan t)$, $ t < \pi/2$ | (28) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$ |
| (29) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ | (30) $\gamma(t) = (t^{31} + \cos t, 2014 - t^{31} - \cos t)$ |

9. Encontre equações paramétricas para as curvas definidas pelas equações abaixo:

- | | | |
|--|--------------------------------|-----------------------------|
| (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ | (2) $3(x-1)^2 + 5(y+2)^2 = 15$ | (3) $y^2 - 4y + 3 - x = 0$ |
| (4) $x^3 + y^3 = 6xy$ (Folium de Descartes) | (5) $y^2 = x^3$ | (6) $y^2 = x^3 + x^2$ |
| (7) $(x^2 + y^2)^2 = xy$ (Lemniscata de Bernoulli) | (8) $x^8 + y^8 = x + y$ | (9) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ |

10. Esboce as seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| (1) $r = 1$ | (2) $\theta = \pi/3$ | (3) $r = \cos \theta$ | (4) $r = \cos 2\theta$ |
| (5) $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ | (6) $r = \cos 3\theta$ | (7) $r = 2 \operatorname{sen} \theta $ | (8) $r = \frac{1}{\cos \theta}$ |
| (9) $r = \theta$ | (10) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ | (11) $r = \ln \theta$ | (12) $r = \operatorname{cosec} \theta$ |
| (13) $r = \sec \theta$ | (14) $r = 1 + 2\operatorname{sen} \theta$ | (15) $r = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} \theta$ | (16) $r^2 \theta = 1$ |

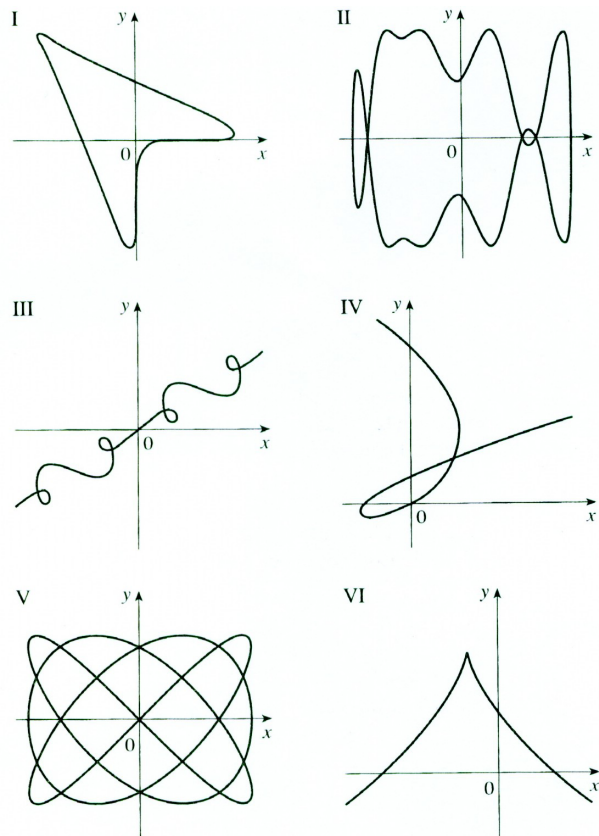
11. Encontre equações polares e faça um esboço das as curvas dadas abaixo em equações cartesianas:

- | | |
|---|--|
| (1) $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$ | (2) $2x + 3y = 1$ |
| (3) $x^2 - y^2 = 1$ | (4) $x^2 + 2y^2 = 1$ |
| (5) $x^2 + y^2 = e^{2y/x}$ | (6) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ |
| (7) $y - x \tan((x^2 + y^2)^{-1/2}) = 0$ | (8) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ |
| (9) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ | (10) $xy = 4$ |
| (11) $x^2 + y^2 = 20x$ | (12) $x^2 + x = -y^2$ |
| (13) $y = x^3$ | (14) $y^2 = x^3$ |
| (15) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (Cardióide) | (16) $y^{2013} = x^{2014}$ |
| (17) $4x^2 = 81(x^2 + y^2)$ (Curva de Eudoxus) | (18) $y^2(2 - x) = x^3$ (Cissóide de Diocles) |
| (19) $(x - 1)^2(x^2 + y^2) = x^2$ (Conchóide de Nicomedes) | (20) $(x + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2$ (Pérola de Sluze) |
| (21) $4(x^2 + y^2 - x) = 27(x^2 + y^2)^2$ (Curva de Cayley) | (22) $x^4 = x^2 - y^2$ (Figura Oito) |

12. Encontre pelo menos dois conjuntos distintos de equações paramétricas para representar cada uma das curvas do exercício anterior.

13. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

- | | |
|--|--|
| (a) $x = t^3 - 2t, y = t^2 - t$ | (b) $x = t^3 - 1, y = 2 - t^2$ |
| (c) $x = \operatorname{sen}(3t), y = \operatorname{sen}(4t)$ | (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), y = t + \operatorname{sen}(3t)$ |
| (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), y = \cos(t + \cos t)$ | (f) $x = \cos t, y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$ |



14. Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f .

15. Sejam I um intervalo aberto de \mathbb{R} e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se o traço de γ está contido em uma circunferência então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

16. Calcule o comprimento das curvas abaixo:

- ① $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$;
- ② $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $t \in [0, \pi]$;
- ③ $\gamma_3(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

17. Encontre o comprimento de um arco da cicloide $x = r(\theta - \sin \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$ (Dica: Use a identidade $1 - \cos \theta = 2\sin^2(\theta/2)$).

18. Mostre que o comprimento da elipse $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $a > b > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

onde $\varepsilon = c/a$ é a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

19. Esboce a astróide $x = a \cos^3 \theta$, $y = b \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$, e calcule seu comprimento.

20. Calcule a área limitada por cada uma das curvas abaixo:

$$(1) r = \cos 2\theta \quad (2) r = 3 \cos \theta \quad (3) r = 3(1 + \cos \theta) \quad (4) r^2 = 4 \cos(2\theta)$$

$$(5) r = 2 - \sin(2\theta) \quad (6) r = 1 + 2\sin \theta \quad (7) r = 2 \cos \theta - \sec \theta \quad (8) r = \theta^2$$

21. Encontre a área da região delimitada pelas curvas abaixo:

$$(1) r = \sqrt{3} \cos \theta, r = \sin \theta \quad (2) r = 2 \cos \theta, r = 1 \quad (3) r = 1 + \cos \theta, r = 1 - \cos \theta$$

$$(4) r = \sin 2\theta, r = \cos 2\theta \quad (5) r = 3 \cos \theta, r = 2 - \cos \theta \quad (6) r = 3 \sin \theta, r = 2 \sin \theta$$

$$(7) r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta \quad (8) r = 4 \sin \theta, r = 2 \quad (9) r = \sin \theta, r = \sin 2\theta$$

22. Encontre as equações das retas tangentes à curva paramétrica $x(t) = 3t^2 + 1$, $y(t) = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

23. Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s . O vetor normal a γ no ponto $\gamma(t)$ é definido por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $a < s < b$.

- ① Mostre que os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$ são perpendiculares para qualquer $s \in (a, b)$.
- ② Mostre que existe uma função $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$, para $a < s < b$. O valor $\kappa(s)$ é chamado *curvatura* de γ em $\gamma(s)$. Mostre que $\kappa = x'y'' - x''y'$, onde $'$ denota a derivada em relação a s .
- ③ Considere o ângulo $\theta(s)$ formado pelo eixo x e pela reta tangente a γ em $\gamma(s)$, i.e., $\tan \theta(s) = y'(s)/x'(s)$. Mostre que $\kappa(s) = \theta'(s)$ para cada $s \in (a, b)$ e interprete geometricamente o que significa o sinal da curvatura de γ .
- ④ Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular qualquer com $\alpha(t) = (p(t), q(t))$, $a < t < b$, s o parâmetro de comprimento de arco e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, a reparametrização de α por comprimento de arco. Como β é parametrizada por comprimento de arco, a curvatura κ de β é bem-definida. Mostre que

$$\kappa = \frac{p'q'' - p''q'}{(p'^2 + q'^2)^{3/2}}$$

O valor desta função em $s = s(t)$ é chamado de *curvatura* de α em $\alpha(t)$.

- ⑤ Mantendo a notação do item anterior, admitindo que α seja o gráfico de uma função $y = f(t)$, mostre que a curvatura é dada por $\kappa = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}$.
- ⑥ Calcule a curvatura da *espiral logarítmica* $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

☆ Curvas notáveis

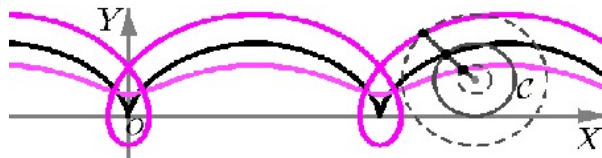
24. A *clotóide* (também chamada de *espiral de Euler* e *espiral de Cornu*) é uma curva γ com a seguinte propriedade: para cada ponto $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ da curva, o ângulo $\varphi(s) = \arctan(y'(s)/x'(s))$ formado pelo vetor tangente em $\gamma(s)$ e o eixo x tem crescimento linear, i.e.,

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2a^2 s.$$

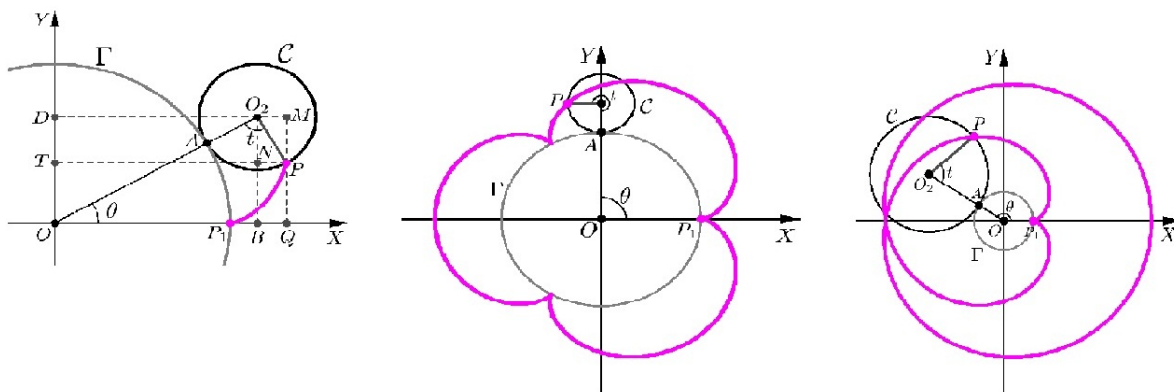
O valor a é uma constante positiva e o termo 2 foi inserido para deixar a resposta final mais comportada.

- (a) Assumindo que $\gamma(0) = (0, 0)$ e que a tangente em $\gamma(0)$ seja horizontal, mostre que $\varphi(s) = (as)^2$.
- (b) Mostre que $x(s) = \int_0^s \cos((au)^2) du$ e $y(s) = \int_0^s \sin((au)^2) du$. Estas integrais são chamadas de *integrais de Fresnel* e são muito importantes em aplicações físicas, por exemplo, em teoria de difração.² A *clotóide* é uma curva especialmente utilizada em construções de estradas e *loops* tipo montanha-russa por limitar a força da gravidade. A curvatura ao longo da clotóide cresce linearmente com o comprimento de arco.
- (c) Esboce o traço da clotóide.

25. (**Trocóide**) Consideremos a circunferência C de centro $(0, r)$ e raio $r > 0$, a semi-reta $s = \{(x, y) : y \geq 0\}$ e um ponto $P = (0, R)$, $R > 0$, nessa semi-reta. Uma *trocóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre o eixo x sem deslizar. Note que a *ciclóide* é um caso particular de trocóide quando $P \in C$. Quando P é exterior a C , a trocóide é chamada de *ciclóide longa*; quando P é interior a C , a trocóide é chamada de *ciclóide curta*. Encontre equações paramétricas que descrevam a trocóide.



26. (**Epiciclóide**) Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam exteriormente apenas em um ponto P . Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R + r, 0)$. Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ . A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram os casos $r < R$ e $r > R$, respectivamente.



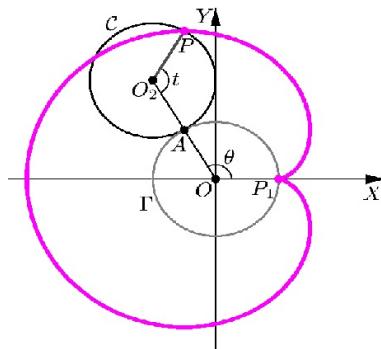
- ① Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P na primeira figura. Mostre que $x = OB - QB$, $y = OD - DT$, $OB = (R + r) \cos \theta$ e $OD = (R + r) \sin \theta$.
- ② Mostre que $QB = r \cos(\theta + t)$ e $DT = r \sin(\theta + t)$.

²Pelo amor de Deus, **NÃO** tente resolver estas integrais!

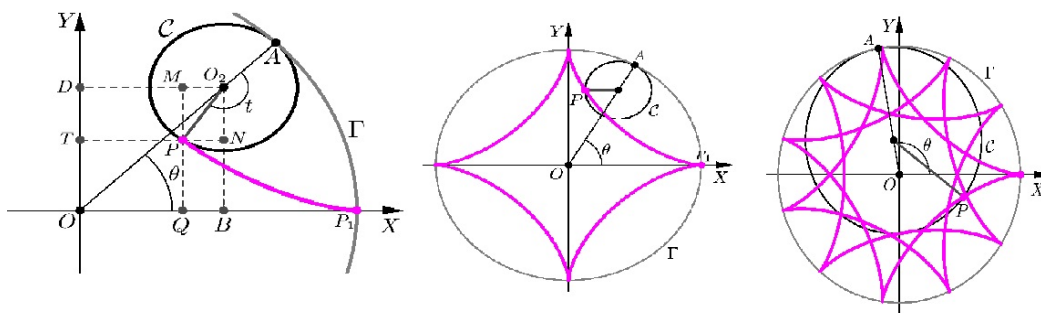
③ Mostre que $t = R\theta/r$ e conclua que as equações paramétricas da epiciclóide são

$$x = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right).$$

Quando $R = r$, a curva obtida é chamada de *cardióide*.



27. **(Hipociclóide)** Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam *interiormente* apenas em um ponto P . Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R+r, 0)$. Denominamos *hipociclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ . A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram hipociclóides.



Usando raciocínios semelhantes àqueles utilizados no problema anterior, mostre que a hipociclóide tem equações paramétricas

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R-r)\sin\theta - r\sin\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right).$$

A hipociclóide obtida com $r = R/4$ é chamada de *astróide*.

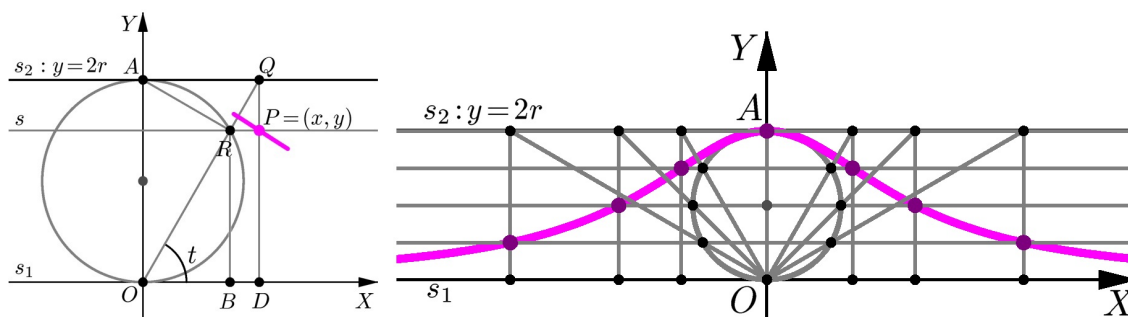
28. O *fólium de Descartes* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

- ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.
- ② Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de γ .
- ③ Faça um esboço de γ .

29. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

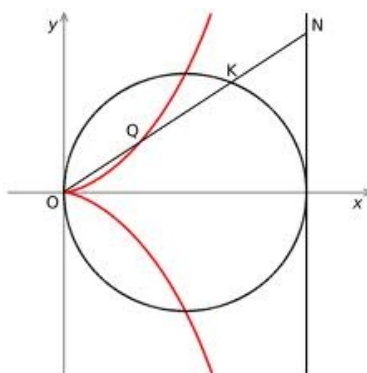
- ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.
- ② Faça um esboço de γ .

30. (**Curva de Agnesi**) Seja C um círculo de raio $r > 0$ tangente ao eixo x e à reta $y = 2r$, onde $r > 0$ é fixado, conforme mostrado na primeira figura abaixo. Da origem, traçamos uma semi-reta em direção à reta s_2 e denotemos por R e Q os pontos de intersecção desta semi-reta com C e s_2 , respectivamente. O segmento QD é perpendicular a s_1 e a reta s é paralela a s_1 . Consideremos também a reta s paralela ao eixo x passando por R e P o ponto de intersecção da reta s com o segmento QD . Os pontos $P = (x, y)$ obtidos traçando todas as semi-retas que partem de O e intersectam C , descrevem a curva denominada *curva de Agnesi*, descrita na segunda figura abaixo.



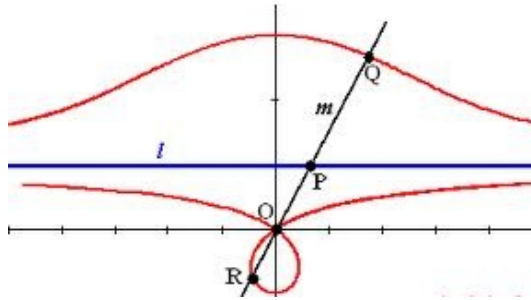
- ① Mostre que $x = OQ \cos t$ e $y = OR \sin t$.
- ② Mostre que $OQ = 2r/\sin t$ e $OR = 2r \sin t$.
- ③ Obtenha equações paramétricas para a curva de Agnesi.

31. (**Cissóide**) Seja C o círculo de centro $(r, 0)$ e raio $r > 0$ e considere a reta $x = 2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta s qualquer partindo da origem, sejam K e N os seus pontos de intersecção com C e s , respectivamente. O ponto Q sobre s tem a propriedade que $OQ = KN$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam s formam uma curva γ chamada de *cissóide de Diocles*. O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo θ entre o segmento ON e o eixo x .



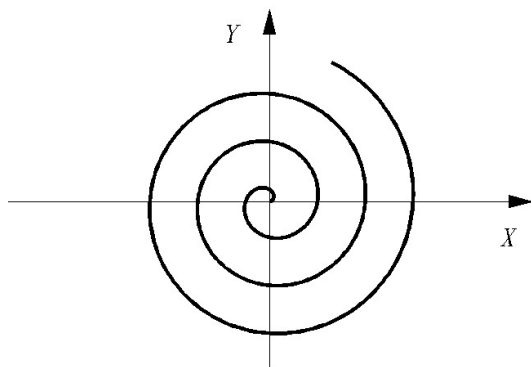
- ① Mostre que $OK = 2r \cos \theta$ e $ON = \frac{2r}{\cos \theta}$. Conclua que $KN = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$.
- ② Obtenha equações paramétricas para γ .
- ③ Mostre que a equação de γ em coordenadas polares é $r = 2r \sin \theta \tan \theta$.
- ④ Mostre que γ tem equação cartesiana $x^3 + (x - 2r)y^2 = 0$.

32. Sejam $a, b > 0$ e a reta horizontal $y = a$. Tracemos uma reta s partindo da origem em direção à r e chamemos de P o ponto de intersecção de s e r . Os pontos Q e R tais que as medidas dos segmentos PQ e PR são constantes iguais a b formam uma curva chamada de *conchóide de Nicomedes*.



Usando o ângulo θ entre a reta s e o eixo x como parâmetro, mostre que γ tem equações paramétricas $x = a \cot \theta + b \cos \theta$ e $y = a + b \sin \theta$, $0 < |\theta| < \pi$.

33. A *espiral de Arquimedes* é a curva γ descrita em coordenadas polares pela equação $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, onde $a > 0$ é fixo.

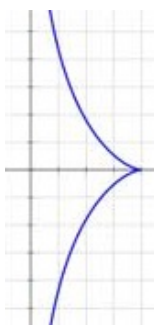


- ① Encontre equações paramétricas para as espirais de Arquimedes.
- ② Mostre que γ satisfaz a equação $x \tan(\sqrt{x^2 + y^2} / a) = y$.
- ③ Mostre que a distância entre dois pontos de intersecção consecutivos de γ com o eixo x é constante igual a $2a\pi$.

34. (**Tractriz**) Seja γ uma curva diferenciável contida no primeiro quadrante, P um ponto de γ , r a reta tangente à γ em P . Admitindo que r não seja vertical, seja Q o ponto de intersecção entre r e o eixo y . Suponha que o segmento PQ tenha comprimento constante igual a $a > 0$.

- ① Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, mostre que γ satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

- ② Resolva esta equação fazendo a substituição trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ e usando a relação trigonométrica $\operatorname{sen} \theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)}$.
- ③ Mostre que $x(\theta) = a \cos \theta$, $y(\theta) = a \cos \theta + a \ln(\tan(\theta/2))$, $|\theta| < \pi/2$, é uma parametrização da curva γ . Esta curva é chamada de *tractriz* e seu traço é a figura abaixo.

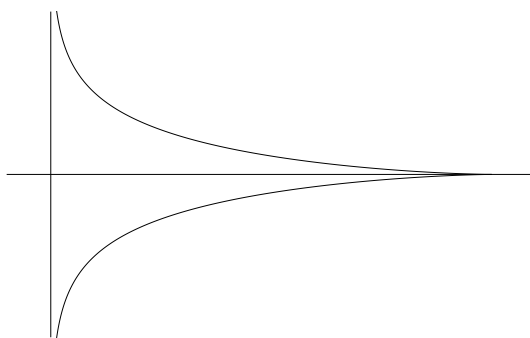


35. (**Tractriz - Ponto de vista dinâmico**) A *tractriz* é a curva do plano xy que tem a propriedade que o segmento de reta tangente delimitado pelo ponto de tangência e o eixo y tem comprimento constante. Esta curva admite a seguinte descrição mecânica: admita que uma partícula P com certa massa é arrastada a partir de sua posição inicial sobre o eixo x ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda PQ de comprimento $a > 0$ mantida tensionada, de forma que a extremidade Q esteja sobre o eixo y . Esta curva foi estudada primeiramente por James Bernoulli em 1691, tem aplicações mecânicas na construção de eixos e acústicas na construção de alto-falantes.³

- (a) Nestas condições, mostre que o menor ângulo formado pelo segmento PQ e o eixo x tem tangente igual a $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. Conclua que, se o gráfico de $y = y(x)$ descreve a trajetória da partícula no primeiro quadrante, então

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

- (b) Determine a solução para esta última equação. Certifique-se de que os gráficos de y e $-y$ descrevem a figura abaixo.



³A superfície obtida por rotação desta curva em torno do eixo y é a superfície chamada de *pseudo-esfera*. Esta superfície tem curvatura gaussiana constante negativa e é um modelo para a geometria de Lobatchevski.

36. **(A braquistócrona)** Em 1696, Johann Bernoulli propõe o seguinte problema: determinar a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Note que o problema não é determinar o caminho mais curto e sim a trajetória percorrida em menor tempo. A curva determinada pela trajetória da partícula é denominada *braquistócrona*, palavra derivada do grego *brakhisto* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema foi resolvido em 1697 por Jacob Bernoulli, Leibniz, L'Hospital e Newton e tem grande importância na história da matemática.

- (a) A velocidade da partícula pode ser obtida igualando-se a energia cinética e a energia potencial, i.e., $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, onde m é a massa da partícula e g a constante gravitacional. Conclua que $v = \sqrt{2gy}$.
- (b) O *Princípio de Fermat* diz que a trajetória que minimiza tempo entre dois pontos é a da luz, logo, se θ é o ângulo entre a vertical e a trajetória, então $\frac{\sin\theta}{v} = \frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_m}$, com v_m constante. Isso implica que a trajetória mínima começa sempre com tangente vertical. Admitindo que a partícula parta da origem e atinja seu ponto mínimo em um ponto de ordenada $-D$, com $D > 0$, temos $v_m = \sqrt{2gD}$.
- (c) Usando o fato que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, conclua que $v_m^2 dx^2 = v^2 ds^2 = v^2(dx^2 + dy^2)$ e $dx = \frac{v dy}{v_m^2 - v^2}$. Mostre que

$$dx = \sqrt{\frac{y}{D-y}} dy,$$

e conclua que $y' = \sqrt{\frac{D-y}{y}}$. A equação acima implica que $x = \int \sqrt{\frac{y}{D-y}} dy$.

- (d) Faça a mudança de variável $y = \frac{D}{2}(1 - \cos\theta) = D\sin^2(\theta/2)$, determine uma parametrização para o gráfico da solução da equação obtida no item anterior e esboce esta solução. A curva solução do problema também é chamada de *ciclóide*.

37. **(A tautócrona)** Em 1659, o físico holandês Christian Huygens propõe o seguinte problema: determinar uma curva plana na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida. Este problema é chamado de *problema da tautócrona* ou *isócrona*, do do grego *tautos* (mesmo), *chronos* (tempo).

- (a) Como no primeiro item do exercício anterior, se $s = s(t)$ é o comprimento de arco da curva, então sua altura y deve ser proporcional à velocidade da partícula, i.e., $y(s) = s^2$, escolhendo unidade de medida adequadas. Logo, $y(s) = s^2$. Disso, $dy = 2s ds$ e $dy^2 = 4s^2 ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$, logo, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}$, portanto,

$$x = \int \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}} dy.$$

- (b) Faça $u = \sqrt{y}$ e mostre que $x = \frac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2} + \frac{1}{4}\arcsin(2u)$ e $y = u^2$. Fazendo $\theta = \arcsin(2u)$, conclua que

$$x(\theta) = \frac{1}{8}(2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)), \quad y(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$$

é uma parametrização para a curva solução do problema. Observe que, a menos de parametrização, a solução do problema da tautócrona também é uma cicloide.

☆ Respostas

(1)

(1) $p_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$;

(2) $p_n(x) = e + e(x-1) + e(x-1)^2/2! + \dots + e(x-1)^n/n!$;

(3) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3! + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$;

(4) $p_{2k}(x) = 1 - x^2/2! + (-1)^k x^{2k}/(2k)!$;

(5) $p_n(x) = \cos 1 - \operatorname{sen} 1(x-1) + \cos 1(x-1)^2/2! - \operatorname{sen} 1(x-1)^3/3! + \dots + f^{(n)}(1)(x-1)^n/n!$;

(6) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + \dots + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$;

(7) $p_n(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots + (-1)^n x^n/n$;

(8) $p_{2k+1}(x) = 2x + 2x^3/3 + \dots + 2x^{2k+1}/(2k+1)$;

(9) $p_n(x) = p_3(x) = 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3$ para todo $n \geq 3$;

(10) $p_{2k+1}(x) = x + x^3/3! + \dots + x^{2k+1}/(2k+1)!$;

(11) $p_{2k}(x) = 1 + x^2/2! + \dots + x^{2k}/(2k)!$;

(12) $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$;

(13) $p_{2k}(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^k x^{2k}$;

(14) $p_{n+1}(x) = x^2 - x^3/2 + x^4/3 - \dots + (-1)^n x^{n+1}/n$;

(15) $p_{2k}(x) = 1 + x + \dots + 2^{2k-1} x^{2k}/(2k)!$

(11) ① $r = a$; ② $r = 1/(2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)$;

③ $r = 1/\sqrt{\cos(2\theta)}$; ④ $r = 1/\sqrt{\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta}$; ⑤ $r = e^\theta$; ⑥ $r = (\cos^{2/3}\theta + \operatorname{sen}^{2/3}\theta)^{-3/2}$; ⑦ $r = 1/\theta$;

⑧ $r = 2|\operatorname{sen}(2\theta)|$; (13) (a)-IV, (b)-VI, (c)-V, (d)-III, (e)-I, (f)-II; (7) Não; $\gamma(t) = (t^3, t^2)$; (16) ① $64\sqrt{5}$,

② $\sqrt{2}$, ③ $\pi^2/2$; (10) $8r$;

(12) $6a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$;

(20) (1) $\pi/2$; (2) $9\pi/4$;

(18) $x(\theta) = r\theta + (R-r)\operatorname{sen}\theta$ e $y(\theta) = r\theta + (R-r)\cos\theta$;

(15) $t = 1: x - y - 1 = 0$ e $t = -2: 2x + y - 11 = 0$;

(25) $x = rt - R\operatorname{sen}t$ e $y = r - R\cos t$; (23) ③ $x = 2r\cotg\theta$ e $y = 2r\operatorname{sen}^2\theta$;

(31) ② $x = 2r\operatorname{sen}^2\theta$ e $y = 2r\left(\tan\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)$;

(33) ① $x = a\theta\cos\theta$ e $y = a\theta\operatorname{sen}\theta$;