

Lista 4

☆ Aplicações do Teorema da Função Implícita

1. Verifique se as equações abaixo definem implicitamente y como função de x ou x como função de y em uma vizinhança da solução P dada e calcule a derivada da função definida implicitamente:

(a) $x^2 y^3 + y \cos x + \cos(xy) = 1, P = (0, 0)$

(b) $x^{xy} + (\operatorname{sen} x) \ln(1 + y^2) = 1, P = (\pi/2, 0)$

(c) $x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3 + 1 = 0, P = (1, 0)$

(d) $\operatorname{sen}(x^2 + x y^2) + x + \ln y = 0, P = (0, 1)$

(e) $e^{x+y} + 2x + y = 1, P = (0, 0)$

(f) $(1 + x^2)^y + (1 + y^2)^x = 2, P = (0, 0)$

(g) $y \sin x + x \sin y = 0, P = \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{l\pi}{2}\right)$, onde k, l são inteiros ímpares

(h) $(\ln(1 + x^2 + y^2))^{\cos(x+y)} - \arctan y = 0, P = (0, 0)$

(i) $x^2 y^2 + x + y^3 = 1, P = (0, 1)$

(j) $x^{2014} y^{2013} + x^{2013} y^{2012} + \dots + x^2 y + x + y = 7, P = (0, 7)$

2. Verifique se as equações abaixo definem implicitamente uma das variáveis em função das outras duas em uma vizinhança da solução P dada e calcule as derivadas parciais da função definida implicitamente:

(a) $e^{x+y-z^2} - \cos(1 - xz^4) = 0, P = (1, 0, 1)$

(b) $x y^5 + x^3 z^7 + y^2 z^3 = 3, P = (1, 1, 1)$

(c) $\ln(x + y + \sin z) + 2^{(x-1)y+2z} - 1 = 0, P = (1, 0, 0)$

(d) $(1 + x^2)^{y+z} + (1 + y^2)^{x+z} + (1 + z^2)^{x+y} = 3 - \sin(x + y + z), P = (0, 0, 0)$

(e) $\pi x e^{yz} + y e^{xz} + z e^{xy} = 4 \arctan(x + y^2 - 3z), P = (1, 0, 0)$

(f) $x^{y+z} + y^{x+z} + z^{x+y} = 6, P = (2, 1, 1)$

3. Verifique se os sistemas de equações abaixo definem implicitamente duas das variáveis em função da outra em uma vizinhança da solução P dada e calcule as derivadas da função definida implicitamente:

(a) $\begin{cases} x^2 + xz + xy + z = 0 \\ \operatorname{sen} x + yz + 5xyz^4 = 0 \end{cases}, P = (0, 0, 0)$

$$(b) \begin{cases} x^y + y^z + z^x = 1 \\ y^x + z^y + x^z = 1 \end{cases}, P = (1, 1, 1)$$

$$(c) \begin{cases} \sin(x^2 + 6y + z^3) + \cos(x - y + 3z^2) = 1 \\ \arctan(x^3 z^2 - y + 4x^2) + 6x - 4z^4 = 0 \end{cases}, P = (0, 0, 0)$$

$$(d) \begin{cases} 3x^2 - 4y^3 z + 2y = 2 \\ 7xy^3 - 5xyz + 3y - z = 3 \end{cases}, P = (0, 1, 0)$$

$$(e) \begin{cases} e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = 3 \sin(x^2 + y^4 + 7z + \pi/2) \\ \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) = e^{x^2 + y^4 + 7z} - 1 \end{cases}, P = (0, 0, 0)$$

$$(f) \begin{cases} e^{\sin(x+y)} + e^{\sin(y+z)} + e^{\sin(x+z)} = \ln(1 + \tan(xyz)) + 3 \\ \sin(xy) + \cos(yz) + \sin(x+y+z) = (1+x^2)^{x+3z} \end{cases}, P = (0, 0, 0)$$

4. Temos trabalhado desde o início com funções reais de duas ou três variáveis e estudamos o teorema da função implícita neste contexto. As mesmas idéias utilizadas aqui provam este resultado no contexto mais geral de uma função real de classe C^k definida em um aberto de \mathbb{R}^{n+1} . Este resultado pode ser utilizado para mostrar que uma *perturbação de classe C^1* dos coeficientes de um polinômio produz uma *perturbação de classe C^1* das raízes simples do polinômio.

Mostre que se $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz *simples* da equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

então existem intervalos abertos I_0, I_1, \dots, I_n, J contendo $a_0, a_1, \dots, a_n, x_0$, respectivamente, e uma função $\varphi: I_0 \times I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow J$ de classe C^∞ que associa a cada $(n+1)$ -upla de coeficientes a'_0, a_1, \dots, a'_n a única raiz $f(a'_0, a_1, \dots, a'_n)$ da equação polinomial

$$a'_n x^n + a'_{n-1} x^{n-1} + \dots + a'_1 x + a'_0 = 0$$

em J . Observe neste caso o que ocorre com as raízes duplas. Reflita sobre isto e compare este resultado com a fórmula de Bhaskara para $n = 2$.