UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 14/03/2014

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Você pode utilizar sem provar as expressões para polinômios de Taylor vistas em aula;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 Usando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo com erro ε conforme solicitado:

1. **(1,5 ponto)** $1/e$, $\varepsilon < 10^{-4}$ $\qquad \frac{1}{e} = e^{-1}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}_{=E_n(x)}, \quad c \text{ ENTRE } x \text{ E ZERO}$$

$$|E_n(-1)| \le \frac{e^c}{(n+1)!} \le \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-4} \iff (n+1)! > 10^4 \;\therefore$$

PODEMOS TOMAR $n = 7$, POIS $8! = 40320 > 10000$. LOGO,

$$e^{-1} \cong 1 - 1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^7}{7!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!},$$

COM ERRO $< 10^{-4}$.

2. **(1,5 ponto)** $\operatorname{sen}(2)$, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}}_{=E_n(x)},$$

c ENTRE ZERO E x.

$$|E_n(2)| \le \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-3} \iff 2^{2n+2} \cdot 10^3 < (2n+2)!$$

$\underline{n=5}$ $\quad 2^{12} \cdot 10^3 = 4096.000 < 12!$, POIS $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10! =$

$12 \cdot 11 \cdot 3.682.880 > 36.828.800$. $\therefore$

$$\operatorname{sen} 2 \cong 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!}, \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}.$$

3. **(2 pontos)** $\sqrt{82}, \varepsilon < 10^{-3}$

VIMOS QUE

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) \overbrace{- \frac{1}{4\bar{x}_0^{3/2}}(x-x_0)^2}^{E_1(x)}, \quad \bar{x}_0 \text{ ENTRE } x \text{ E } x_0$$

FAZENDO $x=82$ E $x_0=81$, TEMOS

$$\sqrt{82} = 9 + \frac{1}{18} + E_1(82), \text{ E}$$

$$|E_1(82)| \leq \frac{1}{4\bar{x}_0^{3/2}} \leq \frac{1}{4 \cdot 81^{3/2}} = \frac{1}{4 \cdot 9^3} = \frac{1}{2916} < 10^{-3}.$$

$$\therefore \sqrt{82} \cong 9 + \frac{1}{18} = \frac{163}{18}, \text{ COM ERRO} < 10^{-3}.$$

4. **(2 pontos)** $\int_0^1 x^7 \cos(\sqrt{x})\,dx, \varepsilon < 10^{-5}$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \overbrace{\frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} t^{2n+1}}^{E_{2n+1}(t)}, \text{ PARA ALGUM}$$

c ENTRE ZERO E x.

FAZENDO $t=\sqrt{x}$, $x>0$,

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} + E_{2n+1}(\sqrt{x})$$

MULTIPLICANDO POR x^7,

$$x^7\cos(\sqrt{x}) = x^7 - \frac{x^8}{2!} + \frac{x^9}{4!} + \cdots + \frac{(-1)\, x^{n+7}}{(2n)!} + x^7 E_{2n+1}(\sqrt{x})$$

INTEGRANDO DE ZERO A UM,

$$\int_0^1 x^7 \cos(\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 \left\{ x^7 - \frac{x^8}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+7}}{(2n)!} \right\} dx + \underbrace{\int_0^1 x^7 E_{2n+1}(\sqrt{x})\,dx}_{=R_{2n+1}(x)}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2!\,9} + \frac{1}{4!\,10} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+8)(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

Temos $\displaystyle |R_{2n+1}(x)| \leq \int_0^1 x^7 |E_{2n+1}(x)| dx$

$$\leq \int_0^1 x^7 \cdot \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+7+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} dx$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{n+8+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2n+1)!\left(n+\frac{17}{2}\right)} < \frac{1}{(2n+1)!(n+8)}$$

$$\underset{?}{<} 10^{-5}$$

$\underline{n=4}$ $\quad 9!\,12 = 362.880 \cdot 12 > 362.880 \cdot 10 > 100.000$

$$\therefore \int_0^1 x^7 \cos(\sqrt{x})\, dx \cong \frac{1}{8} - \frac{1}{2!\,9} + \frac{1}{4!\,10} - \frac{1}{6!\,11} + \frac{1}{8!\,12},$$

com erro $< 10^{-5}$.

5. **(2 pontos)** $\dfrac{1}{e\sqrt[3]{e}}$, $\varepsilon < 10^{-3}$ (Dica: Use a estimativa $(4/3)^k < 2^k$, $k \in \mathbb{N}$)

$$\frac{1}{e\sqrt[3]{e}} = e^{-4/3}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\substack{\shortparallel \\ E_n(x)}},$$

PARA ALGUM C ENTRE ZERO E X

$$|E_n(-4/3)| \le \frac{\overset{\le 1}{e^c}\,(4/3)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \underset{?}{<} 10^{-3}$$

$$\iff \quad 2^{n+1} < 10^{-3}(n+1)! \iff 10^3 \cdot 2^{n+1} < (n+1)!$$

$\underline{n=9}$ $\quad 1000 \cdot 2^{10} = 1000 \cdot 1024 = 1.024.000 < 3.628.800 = 10!$

$$\therefore \quad e^{-4/3} \cong 1 - (4/3) + \frac{(4/3)^2}{2!} - \cdots - \frac{(4/3)^9}{9!}, \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}.$$

Questão 2 **(1 ponto)** Seja $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$. Determine $f^{(2017)}(0)$. (Aqui, $f^{(n)}(0)$ denota a derivada de f de ordem n calculada em $x = 0$.)

VIMOS QUE

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + E_n(x), \quad \text{com} \quad \left|\frac{E_n(x)}{x^n}\right| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

LOGO,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + E_n(-x)$$

$\therefore$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$
$$= \underbrace{2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right\}}_{=p_{2k+1}(x)} + \underbrace{\left\{E_{2k+1}(x) - E_{2k+1}(-x)\right\}}_{=F_{2k+1}(x)}$$

COMO
$$\lim_{x\to 0} \frac{F_{2k+1}(x)}{x^{2k+1}} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{E_{2k+1}(x)}{x^{2k+1}} + \frac{E_{2k+1}(-x)}{(-x)^{2k+1}}\right\} = 0,$$

SEGUE QUE $p_{2k+1}(x)$ É O POLINÔMIO DE TAYLOR DE GRAU $2k+1$ DE f EM TORNO DE $x=0$. OS COEFICIENTES DE ORDEM PAR DE p_{2k+1} SÃO NULOS ($\therefore$ AS DERIVADAS DE f DE ORDEM PAR SÃO NULAS NA ORIGEM) E OS DEMAIS COEFICIENTES SÃO $\dfrac{2}{2k+1}$ $\therefore$

$$\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{2}{2k+1} \Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = \frac{2(2k+1)!}{2k+1} = 2\cdot(2k)!$$

$\therefore \quad f^{(2017)}(0) = 2 \cdot (2016)!$

Questão 3 **(2 pontos - EXTRA)** Dados $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de classe C^n e $x_0\in(a,b)$, vimos em aula que o polinômio de Taylor p_n de grau n de f em $x=x_0$ tem a propriedade que

$$f(x)=p_n(x)+E_n(x),$$

onde $\lim_{x\to x_0}\frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Mostre que se q_n é um polinômio de grau n com a propriedade

$$f(x)=q_n(x)+F_n(x),$$

onde F_n é uma função qualquer satisfazendo $\lim_{x\to x_0}\frac{F_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$, então $q_n=p_n$, ou seja, *q_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em $x=x_0$.*

TEMOS QUE

$$p_n(x)+E_n(x)=f(x)=q_n(x)+F_n(x)$$

$$\therefore\quad p_n(x)-q_n(x)=F_n(x)-E_n(x).\quad (\ast)$$

ESCREVAMOS $p_n(x)=a_n(x-x_0)^n+\dots+a_1(x-x_0)+a_0$ E

$q_n(x)=b_n(x-x_0)^n+\dots+b_1(x-x_0)+b_0$. FAZENDO $x=0$

EM $(\ast)$ TEMOS $a_0-b_0=F_n(x_0)-E_n(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0$

$\therefore\ a_0=b_0$. VAMOS DIVIDIR AMBOS OS MEMBROS DE $(\ast)$ POR

$x-x_0$:

$$\frac{(a_n-b_n)(x-x_0)^n+\dots+(a_1-b_1)(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{F_n(x)}{x-x_0}-\frac{E_n(x)}{x-x_0}$$

$$(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1}+\dots+(a_2-b_2)(x-x_0)+(a_1-b_1)=\left\{\frac{F_n(x)}{(x-x_0)^n}-\frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n}\right.\cdot(x-x_0)^{n-1}$$

FAZENDO $x\to x_0$ NA ÚLTIMA IGUALDADE, TEMOS $a_1=b_1$.

PROCEDENDO DESTA FORMA, PROVAMOS QUE $a_j=b_j$ P/ $j=0,1,\dots,n$

$\therefore\ p_n=q_n$ //