UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 12/05/2017

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Determine os limites abaixo, se existirem, justificando suas respostas (cada ítem vale **1 ponto**):

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2e^{x+3y} - \operatorname{sen} x}{5e^x + 2\cos(xy)}$ $= \frac{2}{7}$, POIS TRATA-SE DE UM QUOCIENTE DE FUNÇÕES CONTÍNUAS, SENDO QUE O DENOMINADOR NÃO SE ANULA EM $(0,0)$.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+(xy)^4)\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 x + 6\arctan(x-y)^2}}$ $= 0$

POIS $0 \leq \operatorname{sen}^4 x \leq \operatorname{sen}^4 x + 6\arctan(x-y)^2 \Rightarrow$

$0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq \sqrt{\operatorname{sen}^4 x + 6\arctan(x-y)^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 x + 6\operatorname{arctg}(x-y)^2}}$ (*)

≤ 1 $\therefore$ É LIMITADA E $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+(xy)^4) = \ln 1 = 0$.

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy\operatorname{sen}(3y)}{x^2+y^4}}_{=f(x,y)}$

TEMOS QUE $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$ E

$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot t \operatorname{sen}(3t)}{t^4 + t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3t)}{2t} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ O LIMITE NÃO EXISTE.

Questão 2 Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^5+y^5}$.

1. **(1 ponto)** Determine as derivadas parciais de f em todos os pontos do conjunto $B = \{(a,b) : b \neq -a\}$. Conclua que f é diferenciável em B.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}(x^5+y^5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5x^4 = \frac{5}{3}\frac{x^4}{\left(\sqrt[3]{x^5+y^5}\right)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{5}{3}\frac{y^4}{\left(\sqrt[3]{x^5+y^5}\right)^2}$$

COMO $\sqrt[3]{x^5+y^5} \neq 0$ EM B, ENTÃO f_x, f_y SÃO QUOCIENTES DE FUNÇÕES CONTÍNUAS, SENDO QUE O DENOMINADOR É NÃO-NULO $\therefore$ f_x, f_y SÃO CONTÍNUAS. DISSO DECORRE QUE f É DIFERENCIÁVEL EM B.

2. **(1,5 ponto)** Determine as derivadas parciais de f na origem, se existirem.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^5}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{2/3} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\sqrt[3]{k^5}}{k} = \lim_{k \to 0} k^{2/3} = 0$$

3. **(1,5 ponto)** f é diferenciável na origem? Justifique.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^5+k^5}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt[3]{\frac{h^5+k^5}{(h^2+k^2)^{3/2}}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt[3]{\underbrace{h^2}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{h^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}}_{\text{LIMITADA}} + \underbrace{k^2}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}}_{\text{LIMITADA}}} = 0$$

POIS $0 \le h^2 \le (h^2+k^2) \Rightarrow 0 \le (h^2)^{3/2} = h^3 \le (h^2+k^2)^{3/2}$.

$\therefore 0 \le \dfrac{h^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} \le 1$; E DE FORMA SEMELHANTE,

$0 \le \dfrac{k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} \le 1$. $\therefore f$ É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

Questão 3 Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que admite o plano de equação

$$2x - 6y + 2z = 7$$

como tangente ao seu gráfico no ponto $(3,-1,f(3,-1))$.

1. **(1 ponto)** Determine $f(3,-1)$, $\nabla f(3,-1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(3,-1)$, onde $v = (-1,1)$

$2x - 6y + 2z = 7 \rightsquigarrow z + \frac{5}{2} = -1\cdot(x-3) + 3(y+1) \therefore$

$f(3,-1) = -\frac{5}{2}$, $f_x(3,-1) = -1$, $f_y(3,-1) = 3 \Rightarrow \nabla f(3,-1) = (-1,3)$.

Como f é diferenciável,

$\frac{\partial f}{\partial v}(3,-1) = \langle \nabla f(3,-1), (-1,1)\rangle = \langle(-1,3),(-1,1)\rangle = 1+3 = 4.$

2. **(1,5 ponto)** Seja $g(t) = f(x(t), y(t))$, onde

$$x(t) = 2^{t+1} - 4\operatorname{sen} t + \cos t,\ y(t) = t^5 - 4t^4 + 6t\operatorname{sen} t - 1.$$

Determine $g'(0)$.

$g'(t) = f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$; mas

$x'(t) = 2^{t+1}\ln 2 - 4\cos t - \operatorname{sen} t$, $y'(t) = 5t^4 - 16t^3 +$

$+ 6(\operatorname{sen} t + t\cos t) \therefore x'(0) = 2\ln 2 - 4$, $y'(0) = 0$

$\therefore g'(0) = f_x(3,-1)\cdot x'(0) + f_y(3,-1)\cdot y'(0) = (-1)\cdot(2\ln 2 - 4) = \underline{4 - 2\ln 2}$

3. **(1,5 ponto)** Seja

$$g(u,v) = \{u + f(\underbrace{3\cos u + \operatorname{sen} v}_{x}, \underbrace{uv - e^{u+v}}_{y})\}^2, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determine $\nabla g(0,0)$.

$$g_u(u,v) = 2\{u + f(x,y)\}\cdot\{1 + f_x(x,y)\cdot(-3 \operatorname{sen} u) + f_y(x,y)\cdot(v - e^{u+v})\}$$

$$g_v(u,v) = 2\{u + f(x,y)\}\cdot\{f_x(x,y)\cdot\cos v + f_y(x,y)(u - e^{u+v})\}$$

Como $x(0,0) = 3$, $y(0,0) = -1$, então

$$g_u(0,0) = 2\{0 + f(3,-1)\}\cdot\{1 + f_x(3,-1)\cdot 0 + f_y(3,-1)\cdot(0-1)\}$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)(-2) = 10$$

$$g_v(0,0) = 2\left\{0 + \left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\{(-1)\cdot 1 + 3\cdot(0-1)\} = 2\left(-\frac{5}{2}\right)(-4) = 20.$$

$$\therefore \nabla g(0,0) = (10, 20).$$