UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II
Prof. José Carlos Eidam

TREINO PARA A P4

1. Determine os valores máximo e mínimo de cada função abaixo em cada um dos subconjuntos A indicados. Indique também quais são os pontos onde estes valores são assumidos.

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, A é região triangular fechada com vértices $(2,0), (0,2)$ e $(0,-2)$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, A é o quadrado fechado com vértices $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$

   (c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, A é disco de centro na origem e raio 1

   (d) $f(x,y) = xe^y$, A é o disco de centro na origem e raio 3

   (e) $f(x,y,z) = xy^2z$, A é bola fechada de centro na origem e raio 1

   (f) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$, A é a bola fechada de centro na origem e raio 1

   (g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, A é a bola fechada de centro na origem e raio 1

   (h) $f(x,y,z) = \ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) + \ln(1+z^2)$, A é a esfera definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 12$

   (i) $f(x,y,z) = x - 3y$, A é o conjunto definido pela equação $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$

2. Mostre que um extremante local (x_0, y_0) para uma função do tipo

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l,$$

   com $a, b, c, d, e, l \in \mathbb{R}$ é um extremante global. (Dado $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, observe que o gráfico de $\phi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ é uma parábola.)

3. Determine os pontos críticos das funções abaixo, classificando-os em máximo local, mínimo local e sela. Verifique se as funções dadas admitem máximos e/ou mínimos globais.

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$

   (b) $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 6x + 5y$

   (c) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$

   (d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

   (e) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

   (f) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$

   (g) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy$, $x, y > 0$

   (h) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$

4. Deseja-se construir uma caixa sem tampa na forma de paralelepípedo retângulo com 1m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa quatro vezes mais do que o material utilizado para fazer o fundo. Determine as dimensões da caixa que minimizam o custo do material.

5. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo de forma que a soma dos comprimentos das arestas seja igual a uma constante $c > 0$.

   Para os exercícios seguintes, você pode utilizar os dois princípios abaixo (decorrentes da desigualdade entre média aritmética e geométrica), conforme provamos em aula:

① Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 + \ldots + f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor máximo do produto $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

② Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor mínimo da soma $f_1 + \ldots + f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

6. Dados $a, b, c, k > 0$, determine os valores máximo do produto xyz para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $ax + by + cz = k$.

7. Dado $k > 0$ qualquer, determine o valor máximo do produto x^2y para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

8. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n$ para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

9. Dado $k > 0$, determine o valor máximo do produto x^3yz^2 para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + 2y + 3z = k$.

10. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n, p \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n z^p$ para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + y + z = k$.

11. Ache o valor mínimo da soma $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}$ para $x, y > 0$ satisfazendo $xy = 1$.

12. Dado $a > 0$, ache o valor mínimo da expressão $x(a - x^2)$ para $x > 0$.

13. Encontre o valor mínimo da soma $\dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{z} + 8\sqrt{\dfrac{z}{x}}$ para $x, y, z > 0$.

14. Mostre que para todos $x, y, z > 0$ tem-se

$$\left(x + y + z\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9\,,$$

sendo este valor assumido para $x = y = z = 1$. Conclua que se a soma $x + y + z$ é constante igual a c, então

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{c}\,.$$

15. Verifique se as equações abaixo definem implicitamente uma das variáveis em função das outras duas em uma vizinhança da solução P dada e calcule as derivadas parciais da função definida implicitamente:

(a) $xy^2 - 2x^2y - x + e^y - \cos(xy) = 0$, $P = (0,0)$

(b) $e^x + e^y + e^z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z + 3$, $P = (0,0,0)$

(c) $x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen} y + z \operatorname{sen} z = \pi/2$, $P = (\pi/2, 0, 0)$

(d) $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} + \dfrac{1}{y^2 + z^2 + 1} + \dfrac{1}{z^2 + x^2 + 1} = \dfrac{x + y + z}{3}$, $P = (1,1,1)$

(e) $(1 + x^2)^{y+z} + (1 + y^2)^{x+z} + (1 + z^2)^{x+y} = 3 - \operatorname{sen}(x + y + z)$, $P = (0,0,0)$

(f) $x^{y+z} + y^{x+z} + z^{x+y} = 6$, $P = (2,1,1)$