UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM048 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

SEGUNDA PROVA - 07/04/2017

GABARITO

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Considere a curva plana dada parametricamente por

$$\gamma(t) = (\underbrace{3t^4 + 4t^3 + 1}_{x}, \overbrace{t^3 - 3t + 1}^{y=}),\ t \in \mathbb{R}.$$

1. **(1,5 ponto)** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento para x e y e estude o sinal da curvatura de γ.

$x' = 12t^3 + 12t^2 = 12t^2(t+1)$

$y' = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$

PONTOS CRÍTICOS P/ X E Y:

$-1, 0, 1$

x': − − (−1) + + (0) +

y': + + (−1) − − − (1) +

$\gamma'(-1) = (0,0)$

$\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \left(\frac{3(t+1)(t-1)}{12t^2(t+1)}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{t-1}{t^2}\right)' = \frac{1}{4}\,\frac{2-t}{t^3}$

k: − − (0) + + (2) −

	$t<-1$	$-1<t<0$	$0<t<1$	$1<t<2$	$t>2$
x	↓	↑	↑	↑	↑
y	↑	↓	↓	↑	↑
k	−	−	+	+	−

2. **(2 pontos)** Determine os limites necessários e esboce o traço de γ.

$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$

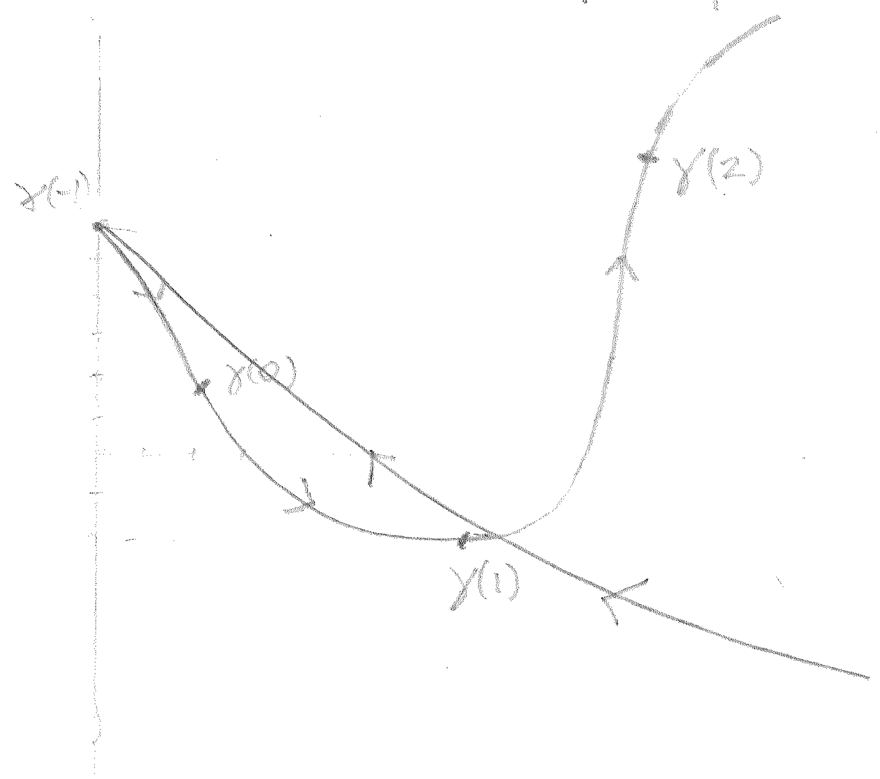
	$-\infty$	$+\infty$
x	$+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$

$\gamma(-1) = (0,3)$

$\gamma(0) = (1,1)$

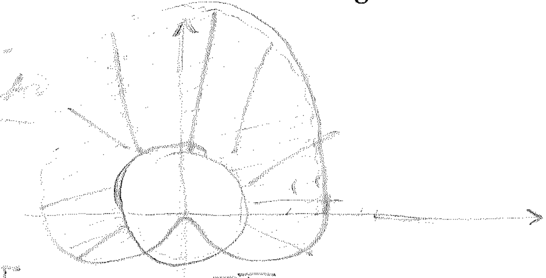
$\gamma(1) = (8,-1)$

$\gamma(2) = (81,3$



Questão 2 Área e Comprimento

1. **(1 ponto)** Considere a circunferência de raio $1/2$ E CENTRO NA ORIGEM e a cardióide $r = 1 + \text{sen}\theta$, ambas definidas usando em coordenadas polares. Determine a área da região externa à circunferência e interna à cardióide.



PONTOS DE INTERSEÇÃO

$$1 + \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{6}.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\left[(1+\text{sen}\,\theta)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\left(\frac{3}{4} + 2\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}^2\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)\right]_{-\pi/6}^{7\pi/6} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{7\sqrt{3}}{4}\right).$$

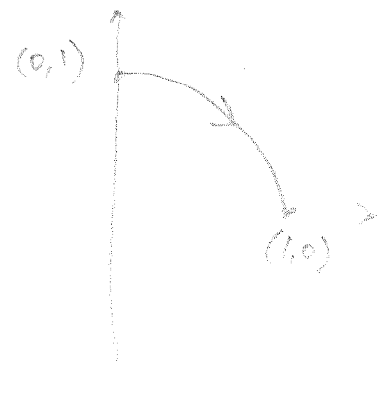
2. **(1 ponto)** Determine o comprimento da curva

$$\gamma(t) = \left(\sqrt[6]{t},\ \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\right),\ 0 \le t \le 1.$$

Dica: Se você identificar a curva, não precisará fazer nenhum cálculo...

$u = \sqrt[6]{t}$, $0 \le u \le 1$: $\gamma(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$, $0 \le u \le 1$

γ DESCREVE O ARCO DA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 1 E CENTRO NA ORIGEM QUE ESTÁ CONTIDO NO 1º QUADRANTE NO SENTIDO HORÁRIO. O COMPRIMENTO DE γ É $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



Questão 3 Considere, em coordenadas cartesianas, a curva descrita pela equação

$$y^2 = x^2 y + x^3 .$$

1. **(1 ponto)** Encontre uma parametrização $\gamma : x = x(t)$, $y = y(t)$ para a curva descrita pela equação acima.

$\frac{y}{x} = t \implies t^2x^2 = x^2 \cdot tx + x^3$

$t^2x^2 = (tx + x)x^2$

$x = 0 \implies y^2 = 0 \therefore y = 0 \therefore$ o único ponto da curva com $x = 0$ é $(0,0)$. Se $x \neq 0$ então $t^2 = tx + x \implies x = \frac{t^2}{1+t}$, $y = \frac{t^3}{1+t}$

2. **(1,5 pontos)** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $x(t)$ e $y(t)$ e estude o sinal da curvatura de γ.

$x' = \frac{2t + t^2}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$, $x' = 0 \implies t = 0$ ou $t = -2$.

$y' = \frac{3t^2 + 2t^3}{(t+1)^2} = \frac{t^2(3+2t)}{(t+1)^2}$, $y' = 0 \implies t = 0$ ou $t = -3/2$.

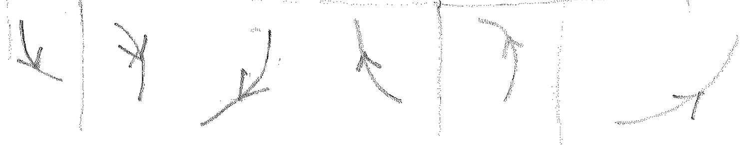
$\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \left(\frac{\frac{t^2(3+2t)}{(t+1)^2}}{\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}}\right)' = 2\frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2}$

− − + + + − − x' (0, 2)

− − + + + + y' ($-3/2$, 0)

+ − − + + + + + k (-3, -1)

	$t<-2$	$-2<t<-3/2$	$-3/2<t<0$	$t>0$
x	↑	↓	↓	↑
y	↓	↓	↑	↑
k	+ | −	−	− | +	+

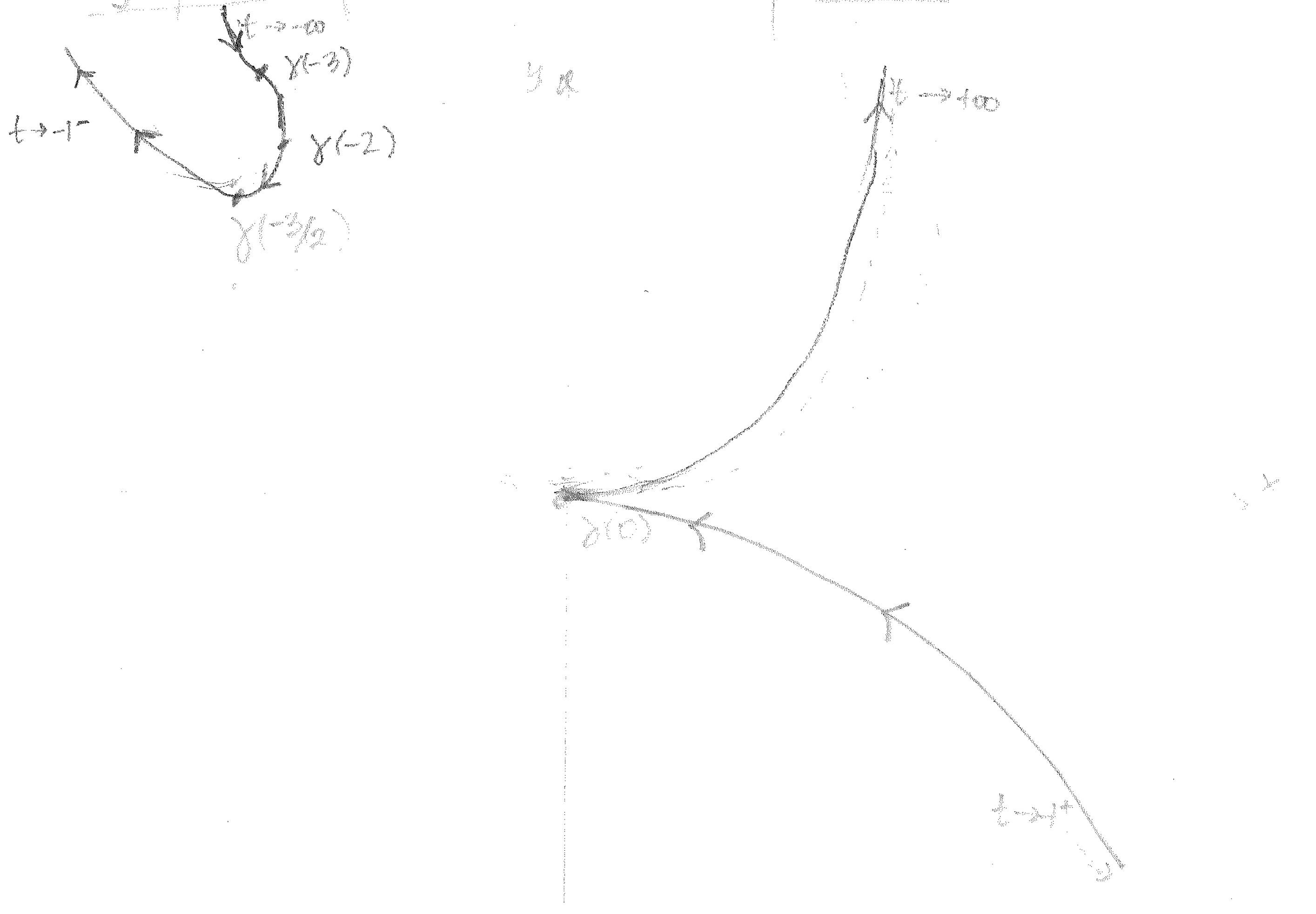


$t=-3$ $t=-1$

3. **(2 pontos)** Determine os limites necessários e esboce o traço de γ.

$x = \dfrac{t^2}{1+t}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t}$

	$t \to -\infty$	$t \to +\infty$	$t \to -1^-$	$t \to -1^+$
x	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$



$\gamma(t) = \dfrac{t}{1+t}\left(t, t^2\right)$ $\therefore$ γ se aproxima de uma [illegible]

$\searrow 1$, se $t \to \pm\infty$