	A
1	
2	
3	
4	
Nota	

UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 05/09/2017

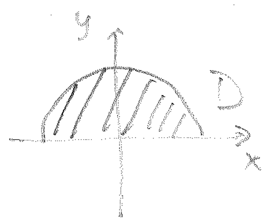
Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 16h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:



(a) **(1,5 ponto)** $\iint_D x^2\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

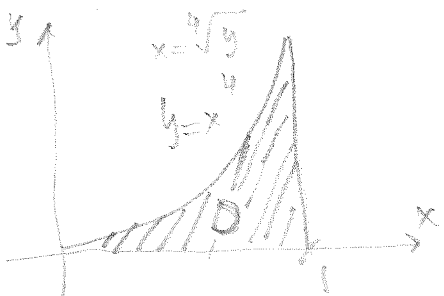
$$\iint_D x^2 dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi/8 \, .$$

(b) **(1,5 ponto)** $\int_0^1 \int_{\sqrt[4]{y}}^1 \cos(1+x^5)\, dxdy$ $= \iint_D \cos(1+x^5)\, dxdy$



$$= \int_0^1 \int_0^{x^4} \cos(1+x^5)\, dy\, dx \, .$$

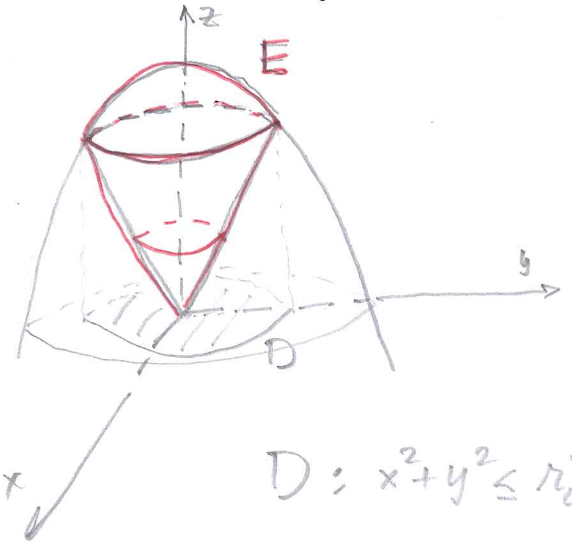
$$= \int_0^1 \cos(1+x^5)\, x^4\, dx$$

$$= \left.\frac{\operatorname{sen}(1+x^5)}{5}\right|_0^1$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 1}{5} \, .$$

Questão 2 Volume e área de superfície

(a) **(2 pontos)** Determine o volume do sólido E delimitado pelo cone $z = \sqrt{5x^2+5y^2}$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.



$D: x^2+y^2 \leq r_0^2$

$$V = \iint_D \left\{ \int_{\sqrt{5x^2+5y^2}}^{1-x^2-y^2} dz \right\} dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(1-x^2-y^2-\sqrt{5x^2+5y^2}\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \left(1-r^2-\sqrt{5}r\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{\sqrt{5}r^3}{3} \right]_0^{r_0}$$

INTERSECÇÃO

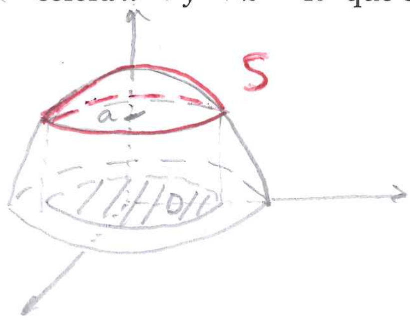
$$\begin{cases} z = \sqrt{5x^2+5y^2} \\ z = 1-x^2-y^2 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{5}r \\ z = 1-r^2 \end{cases} \therefore r^2+\sqrt{5}r-1=0 \Rightarrow r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \doteq r_0$$

$$= 2\pi\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4} - \frac{\sqrt{5}}{3}r_0^3\right)$$

$$= \frac{(61-27\sqrt{5})\pi}{24}$$

(b) **(2 pontos)** Dados $0 < a < R$, determine, em função de a e R, a área (de superfície) da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ que está acima do plano $z = a$.



INTERSECÇÃO

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z=a \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2+y^2 = R^2-a^2$$

$$\therefore D: x^2+y^2 \leq R^2-a^2$$

S É GRÁFICO DE $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\therefore f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

LOGO,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-a^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

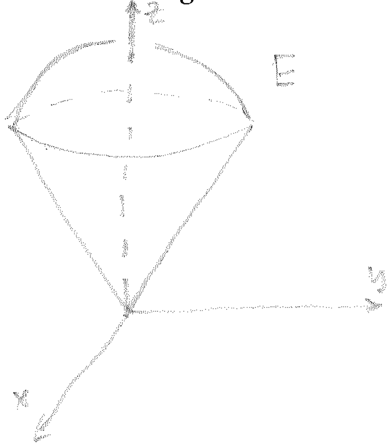
$$= 2\pi R \cdot \left[-\frac{(R^2-r^2)^{1/2}}{1/2}\cdot\frac{1}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-a^2}}$$

$$= 2\pi R(R-a)$$

Questão 3 (2 pontos) Calcule

$$\iiint_E \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx\,dy\,dz, \quad = (\star)$$

onde E é a região interior ao cone $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ e à esfera de centro na origem e raio 1.



CONE EM COORD. ESFÉRICAS:

$$z = \sqrt{3x^2+3y^2}$$

$$r\cos\phi = \sqrt{3}\, r \,\text{sen}\,\phi$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \sqrt{3}\,\text{sen}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/6 \text{ rad.}$$

$$\therefore \quad E: \begin{cases} 0 \le \phi \le \pi/6 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \quad ; \text{ LOGO}$$

$$(\star) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^1 \sqrt{1+r^3}\; r^2 \,\text{sen}\,\phi \; dr\,d\phi\,d\theta$$

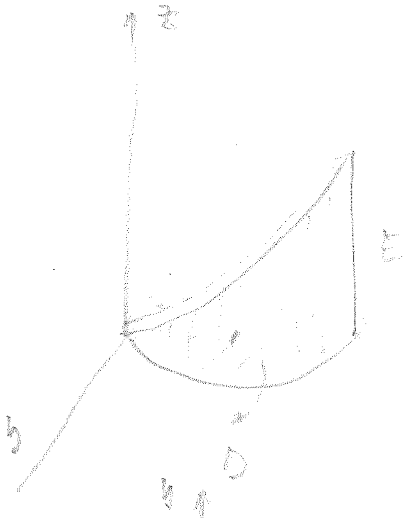
$$= 2\pi \int_0^{\pi/6} \text{sen}\,\phi\, d\phi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+r^3}\; r^2\, dr$$

$$= 2\pi \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/6} \left[\frac{(1+r^3)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{2}{9}\left(2^{3/2}-1\right)$$

$$= \frac{2\pi}{9}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Questão 4 **(1 ponto)** Determine o volume do sólido E contido no primeiro octante que está sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.



$\hookrightarrow C: (x^2-2x+1)+y^2=1$

$(x-1)^2+y^2=1$

x

$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$

$\therefore D: \begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le r\le 2\cos\theta \end{cases}$

$\to \cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$

$$\therefore V = \iint_D \left\{\int_0^{x^2+y^2} dz\right\} dxdy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta = \left\{\frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2}\cos^2 2\theta\, d\theta\right\}$$

$$\left\{\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Big[\theta + \underbrace{\frac{\sin 4\theta}{4}}_{=0}\Big]_0^{\pi/2}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\} = \frac{3\pi}{4}. \; //$$