UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 29/09/2017

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

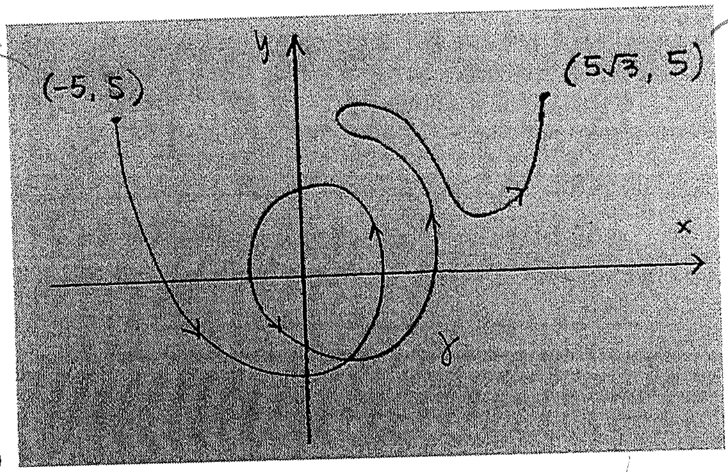
Questão 1 Determine o valor de

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \quad = I$$

para as curvas γ cujo traço está descrito abaixo (cada item vale (**1 ponto**)):

ÂNGULO $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

ÂNGULO $= \pi/6$



(a)

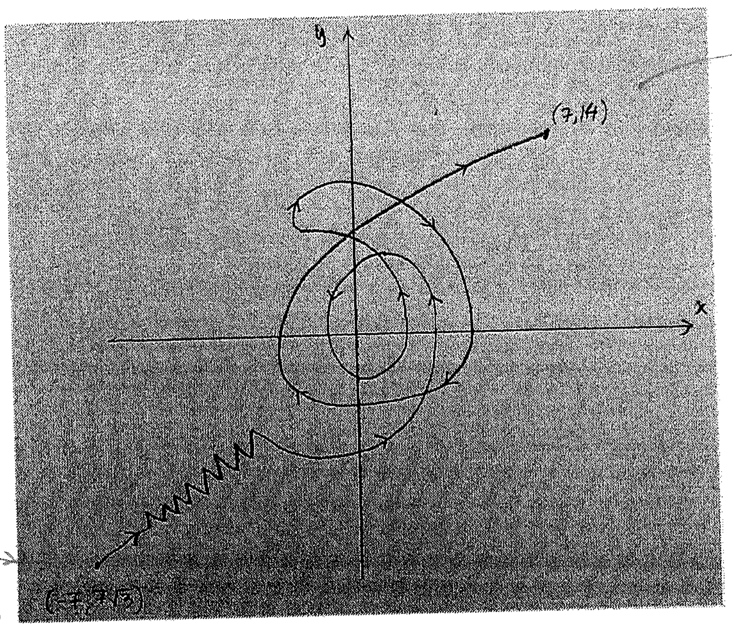
$I = 2\pi +$ VARIAÇÃO DE ÂN NOS EXTREM

$= 2\pi + \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{5\sqrt{3}}\right) - \text{arc}\right.$

$= 2\pi + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}.$

ÂNGULO $= \operatorname{arctg} 2$



ÂNGULO IGUAL A $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

(b)

$I = 2\pi - 2\pi +$ VARIAÇÃO DE ÂNGULO NOS EXTREMOS

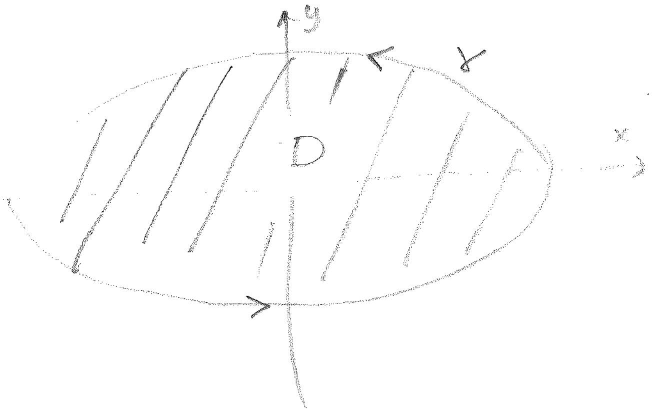
$= \operatorname{arctg}\left(\frac{14}{7}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{-7\sqrt{3}}\right)$

$= \operatorname{arctg} 2 - 4\pi/3.$

Questão 2 Calcule as integrais de linha abaixo (cada item vale **(2 pontos)**) :

(a)
$$\oint_{\gamma} \overbrace{\{e^{1-2\operatorname{sen} x} - x^7\cos(y+1)\}}^{P}\, dx + \overbrace{\{\ln(1+6y^6) - \operatorname{sen}(y+y^2) + xy^2\}}^{Q}\, dy$$

onde γ é a fronteira da região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 \leq 1\}$ orientada no sentido anti-horário.



$$Q_x = y^2$$
$$P_y = x^7 \operatorname{sen}(y+1)$$

PELO TEO. DE GREEN,

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \{y^2 - x^7 \operatorname{sen}(y+1)\}\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\iint_D y^2\,dx\,dy}_{(\star)} - \underbrace{\iint_D x^7 \operatorname{sen}(y+1)\,dx\,dy}_{=0}$$

$= 0$, POIS O INTEGRANDO É ÍMPAR EM RELAÇÃO A x E O DOMÍNIO É SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO y.

FAZENDO $\begin{cases} x = \frac{1}{3} r\cos\theta \\ y = \frac{1}{4} r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, TEMOS

$$(\star) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{4} r \operatorname{sen}\theta\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{4} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{192}\int_0^1 r^3\,dr \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{192}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{768}.$$

(b)

$$\int_\gamma \left\{\frac{-y}{x^2+y^2} + y\cos(xy) + y^2\right\} dx + \left\{\frac{x}{x^2+y^2} + x\cos(xy) + 2xy\right\} dy = I$$

onde $\gamma(t) = (1+t^2+t^4, 1+2t^2+3t^4), 0 \le t \le 1$, $\gamma(0) = (1,1)$, $\gamma(1) = (3,6)$

$$I = \underbrace{\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_1} + \underbrace{\int_\gamma (y\cos(xy) + y^2)dx + (x\cos(xy) + 2xy)dy}_{I_2}$$

COMO A IMAGEM DE γ ESTÁ CONTIDA NO 1.º QUADRANTE, γ NÃO "DÁ VOLTAS" EM TORNO DA ORIGEM, LOGO,

I_1 = VARIAÇÃO DE ÂNGULO EM γ = ÂNGULO $(3,6)$ − ÂNGULO $(1,1)$

$= \operatorname{arctg} 2 - \pi/4$.

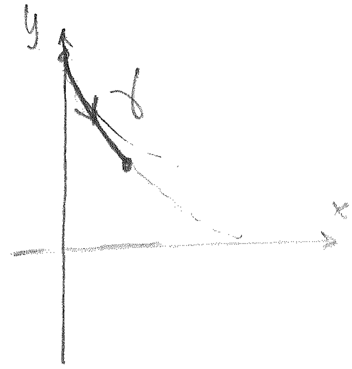
PARA CALCULAR I_2, VAMOS DETERMINAR UM POTENCIAL PARA O CAMPO EM QUESTÃO:

$$\begin{cases} f_x = y\cos(xy) + y^2 \\ f_y = x\cos(xy) + 2xy \end{cases} \implies f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + xy^2 + C.$$

$$\therefore \quad I_2 = f(3,6) - f(1,1) = (\operatorname{sen}(18) + 108) - (\operatorname{sen} 1 + 1)$$

$$= \operatorname{sen} 18 - \operatorname{sen} 1 + 107$$

$$\therefore \quad I = I_1 + I_2 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} 18 - \operatorname{sen} 1 + 107.$$



(c)

$$\int_\gamma \frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2} = I$$

onde γ é a astróide $x^{2/3}+y^{2/3}=2$, $x\geq 0$, percorrida de $(0,\sqrt{8})$ a $(1,1)$

$$I = \underbrace{\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}}_{=I_1} + \underbrace{\int_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}}_{=I_2}$$

PARA I_1, O POTENCIAL EM QUESTÃO É $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$ $\therefore$ $I_1 = \ln\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)-\ln\left(\sqrt{0^2+(\sqrt{8})^2}\right) = -\ln 2$.

COMO γ NÃO "DÁ VOLTAS" EM TORNO DA ORIGEM,

I_2 = VARIAÇÃO DE ÂNGULO EM γ

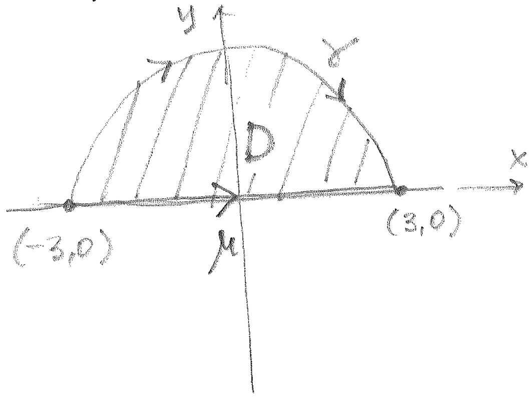
$$= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2} = -\pi/4.$$

$$\therefore\quad I = I_1+I_2 = -\ln 2-\pi/4. \quad //$$

Questão 3 **(2 pontos)** Calcule

$$\int_\gamma \underbrace{\{y^4 \operatorname{sen} x + xe^x\}}_{P}\,dx + \underbrace{\left\{x^3y^2 + e^{y^3-\operatorname{sen}(3y)} - \frac{y^5}{1+7y^4}\right\}}_{Q}\,dy,$$

onde γ é o arco da circunferência $x^2+y^2=9$, $y>0$, percorrido de $(-3,0)$ a $(3,0)$.



PELO TEOREMA DE GREEN, TEMOS

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy - \underbrace{\int_\mu P\,dx+Q\,dy}_{I_1} = -\underbrace{\iint_D (Q_x-P_y)\,dxdy}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{-3}^{3} xe^x\,dx = xe^x\Big|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3} e^x\,dx = 3e^3+3e^{-3}-(e^3-e^{-3})$$
$$= 2e^3+4e^{-3}$$

$$I_2 = \iint_D (3x^2y^2-4y^3\operatorname{sen}x)\,dxdy = 3\iint_D x^2y^2\,dxdy - \underbrace{4\iint_D y^3\operatorname{sen}x\,dxdy}_{=0}$$

$= 0$, POR IMPARIDADE EM x E SIMETRIA DO DOMÍNIO EM y

$$= 3\int_0^\pi\int_0^3 (r\cos\theta)^2(r\operatorname{sen}\theta)^2\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^3 r^5\,dr\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2\,d\theta = 3\cdot\frac{3^6}{6}\cdot\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4}\,d\theta$$

$$= \frac{3^6}{8}\int_0^\pi \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{3^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]_0^\pi = \frac{3^6}{16}\pi = \frac{729\pi}{16}$$

$$\therefore\quad I = I_1 - I_2 = 2e^3+4e^{-3}-\frac{729}{16}\pi$$