UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

Questão	Nota
1	
2	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 31/10/2017

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

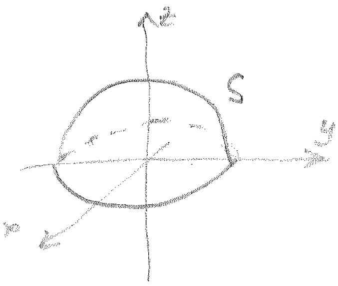
ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 16h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Integrais de superfície

(a) **(1 ponto)** Seja S o hemisfério superior da esfera de raio 1 centrada na origem. Calcule

$$\iint_S z\,dS = \longrightarrow = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$



PARAMETRIZAÇÃO

$$\sigma : \begin{cases} x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi/2 \end{cases}$$

$$|\vec{n}| = \operatorname{sen}\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\phi \, d\phi$$

$$= \pi \left[\frac{-\cos 2\phi}{2} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}(1+1) = \pi. \quad //$$

(b) **(1,5 ponto)** Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está abaixo do plano $z = 1$. Calcule

$$\iint_S \left(x^2 - \operatorname{sen}(xyz) + xe^{-z^2}\right) dS = \iint_S x^2 dS - \underbrace{\iint_S \underbrace{\{\operatorname{sen}(xyz) + xe^{-z^2}\}}_{\text{ÍMPAR EM } x} dS}_{+ \text{ SIMETRIA } \oplus yz \;=\; 0}$$

PARAMETRIZAÇÃO (GRÁFICO DE FUNÇÃO)

$$\sigma(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$$

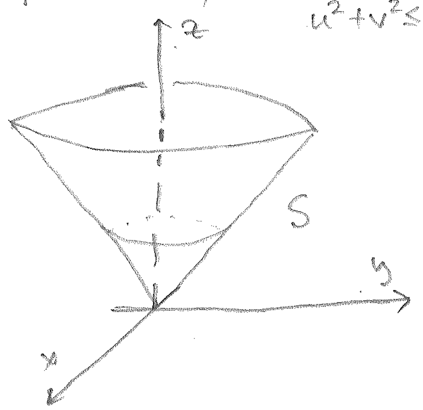
$$\vec{n}(u,v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2}, \quad (u,v) \in D : u^2+v^2 \le 1$$

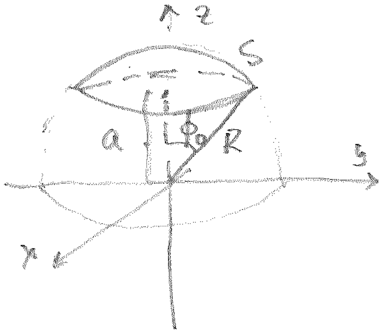
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2 \cdot r\,dr\,d\theta \cdot \sqrt{2}$$

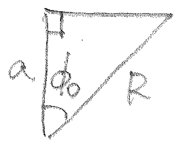
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad //$$



(c) **(1,5 ponto)** Dados $0 < a < R$, considere S a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ que está acima do plano $z = a$. Encontre uma parametrização para S e calcule sua área.





$$\cos\phi_0 = \frac{a}{R}$$

PARAMETRIZAÇÃO DE S

$$\sigma: \begin{cases} x = R \,\text{sen}\,\phi \cos\theta \\ y = R \,\text{sen}\,\phi \,\text{sen}\,\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \phi_0$$

$$|\vec{n}| = R^2 \,\text{sen}\,\phi$$

$$A = \iint_S dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0} |\vec{n}| \, du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0} R^2 \,\text{sen}\,\phi \, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\phi_0}$$

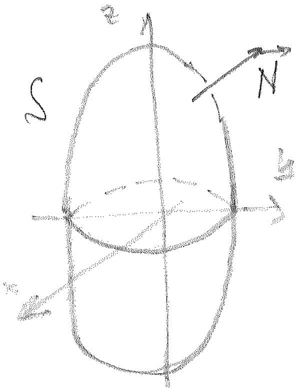
$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\phi_0)$$

$$= 2\pi R^2 \left(1 - \frac{a}{R}\right) = 2\pi R(R-a).$$

Questão 2 Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S em cada um dos casos abaixo (cada item vale **2 pontos**):

(a) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^4 - \text{sen}(x^2-y), y + 4e^{-x^2+3z^4}, z^3 - \ln(1+4x^2+9y^2)\right)$

S é o elipsóide $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$, orientado pela normal exterior



SEJA E A REGIÃO SÓLIDA DELIMITADA POR S. PODEMOS PARAMETRIZAR E DA SEGUINTE FORMA:

$$\begin{cases} x = 2r\,\text{sen}\phi\cos\theta \\ y = 3r\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z = 4r\cos\phi \end{cases}, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \phi < \pi$$

$$\text{div}\,\vec{F} = 4x^3 - 2x\cos(x^2-y) + 1 + 3z^2$$

PELO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV$$

$$= \iiint_E \underbrace{\left(4x^3 - 2x\cos(x^2-y)\right)dV}_{\substack{\text{ÍMPAR EM } x \,+\\ \text{SIMETRIA } Oyz \text{ DA REGIÃO},\\ = 0}} + \iiint_E (1+3z^2)\,dV$$

$$= \frac{4\pi}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (4r\cos\phi)^2\, r^2\,\text{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta \cdot 2\cdot 3\cdot 4$$

$$= 32\pi + 1152\cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^4\,dr \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\phi\,\text{sen}\phi\,d\phi \longrightarrow$$

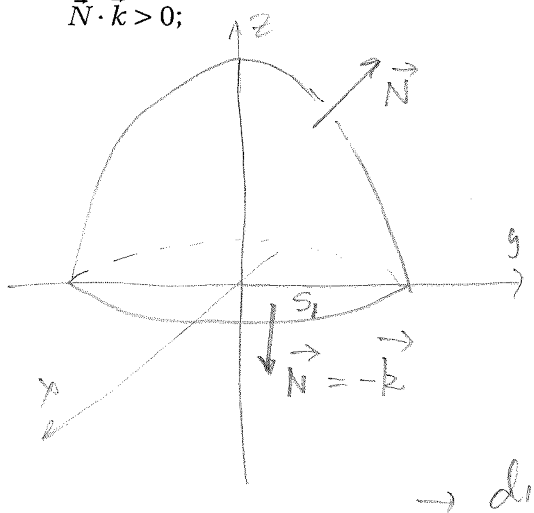
$$= 32\pi + 2304\pi \left[-\frac{\cos^3\phi}{3} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}$$

$$= 32\pi + 768\pi(1+1)$$

$$= 32\pi + 1536\pi = 1568\pi$$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\arctan(yz^2) - \text{sen}(x^2), xy^7 - 2\ln(1+x^2z^2), z - x^2\sqrt{x^2+y^2}\right)$

S é a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 0$, orientada tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$;



TEO. DA DIVERGÊNCIA

(✪) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{(*)} = \underbrace{\iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV}_{(**)}$,

→ E : REGIÃO DELIMITADA POR S E S_1

→ $\text{div}\,\vec{F} = -2x\cos(x^2) + 7xy^6 + 1$

$\boxed{S_1}$ $\sigma(u,v) = (u,v,0)$, $u^2+v^2 \leq 9$

$\vec{n}(u,v) = (0,0,-1)$

(*) $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} -(r\cos\theta)^2\cdot r\cdot r\,dr\,d\theta = -\int_0^3 r^4\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle = -\frac{243\pi}{5}.$

(**) $\displaystyle\iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV = \underbrace{\iiint_E \left(-2x\cos(x^2) + 7xy^6\right)dV}_{\substack{\text{ÍMPAR EM } x\ + \\ \text{SIMETRIA DE } E \text{ EM} \\ \text{RELAÇÃO A } Oyz \\ = 0}} + \iiint_E dV$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{9-r^2} dz\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 (9r - r^3)\,dr = 2\pi\left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=3}$

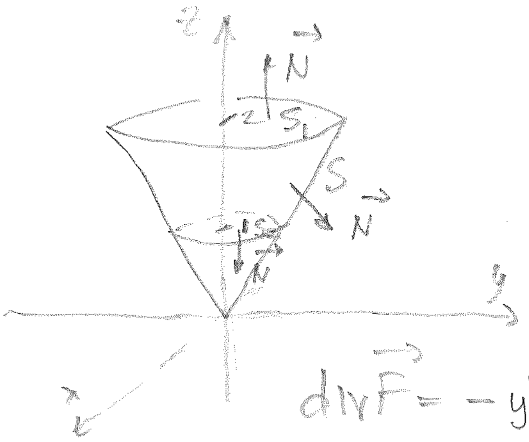
$\displaystyle = 2\pi\left(\frac{9}{2}\cdot 3^2 - \frac{3^4}{4}\right) = \frac{81\pi}{2}.$

∴ VOLTANDO A (✪), TEMOS

$\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \frac{81\pi}{2} - \frac{243\pi}{5} = -\frac{81\pi}{10}$

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (y^3 e^{z^2} + \cos(xy^2), (xyz)^{2018} + 3y^2 z, y^2 + z\,\mathrm{sen}(xy))$

S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitada pelos planos $z = 1$ e $z = 2$ e orientada de forma que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$;



$\underline{S_1}$ $\quad \sigma(u,v) = (u,v,2)$, $(u,v) \in D_1$: $u^2+v^2 \le 4$

$\vec{N} = \vec{k}$

$\underline{S_2}$ $\quad \sigma(u,v) = (u,v,1)$, $(u,v) \in D_2$: $u^2+v^2 \le 1$

$\vec{N} = -\vec{k}$

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = -y^2\,\mathrm{sen}(xy^2) + 2018\, y^{2017}(xz)^{2018} + 6yz + \mathrm{sen}(xy)$$

PELO TEO. DA DIVERGÊNCIA, SE E É A REGIÃO DELIMITADA POR S, S_1, S_2,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{①} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{②} = \underbrace{\iiint_E \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV}_{③}$$

① $$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_{D_2} (v^2 + 2\,\mathrm{sen}(uv))\,du\,dv = \iint_{D_2} v^2\,du\,dv + \underbrace{2\iint_{D_2} \mathrm{sen}(uv)\,du\,dv}_{\substack{\text{IMPARIDADE EM}\\ u \,+\, \text{SIMETRIA}\\ \text{EIXO } y \\ =0}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{2^4}{4}\cdot\pi = 4\pi$$

② $$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = -\iint_{D_1} (v^2 + 2\,\mathrm{sen}(uv))\,du\,dv = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\pi = -\frac{\pi}{4}$$

③ $\operatorname{div}\vec{F} = \underbrace{-y^2 \operatorname{sen}(xy^2)}_{Ⓐ} + \underbrace{2018y^{2017}(xz)^{2018}}_{Ⓑ} + \underbrace{6yz}_{Ⓒ} + \underbrace{\operatorname{sen}(xy)}_{Ⓓ}$

$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\, dV = 0$, POIS Ⓐ, Ⓓ SÃO ÍMPARES EM RELAÇÃO

A x, E Ⓑ, Ⓒ EM RELAÇÃO A y E E É SIMÉTRICO

EM RELAÇÃO AOS PLANOS Oyz E Oxz.

$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = 0 - 4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$. //