UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM139 - Cálculo III - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

GABARITO

PROVA SUBSTITUTIVA - 01/12/2017

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 (2 pontos) Dado $R > 0$, calcule

$$\iint_{S_R} \Big(\underbrace{y^3 \ln(1+z^2+2y^4) + 6y^5(1+z^2)^{1977} e^{\operatorname{sen}(x^2-4)}}_{\text{ÍMPAR EM } y} + \underbrace{3\operatorname{arcsec}(1+x^8+y^8)\operatorname{sen} z}_{\text{ÍMPAR EM } z} + z^4 \Big)\, dS$$

onde S_R denota a esfera de centro na origem e raio $R > 0$.

$$\therefore \iint_{S_R} (*) = \iint_{S_R} z^4\, dS$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (R\cos\phi)^4 \cdot R^2 \operatorname{sen}\phi \; d\theta\, d\phi$$

$$= R^6 \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{\cos^5\phi}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi R^6}{5}.$$

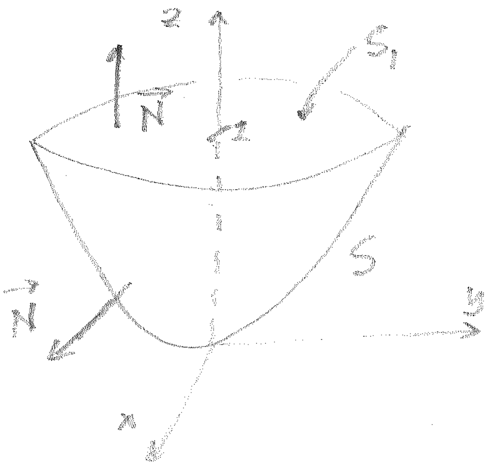
Questão 2 **(2 pontos)** Calcule

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

onde $\vec{F}$ é o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (\cos(2+y^4z^6)+xy^2)\vec{i} + (xz^4e^{-z^2}+\arctan x)\vec{j} + (e^{x^5}y^3 - x^{2018}\operatorname{sen}(y^3)+x^2z)\vec{k}$$

e S é a parte do parabolóide $z = x^2+y^2$ limitada pelo plano $z=1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,0)$ seja $-\vec{k}$.



$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS}_{①} = \overbrace{\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV}^{②}$$

① $$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_{u^2+v^2\le 1} (\dots,\dots, e^{u^5}v^3 - u^{2018}\operatorname{sen}(v^3) + u^2\cdot 1)\cdot(0,0,1)\,du\,dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} \Big(\underbrace{e^{u^5}v^3 - u^{2018}\operatorname{sen}(v^3)}_{\substack{\text{ÍMPARES EM V} \\ \text{+ SIMETRIA}}} + u^2\Big)du\,dv = \iint_{u^2+v^2\le 1} u^2\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.$$

② $$\operatorname{div}\vec{F} = y^2+x^2$$

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left\{\int_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)\,dz\right\}dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1}(1-(x^2+y^2))(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r^3\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 (r^3-r^5)\,dr = 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \pi/6 - \pi/4 = -\pi/12.$$

Questão 3 Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + y\cos(xy) + 2x - y^3, \frac{x}{x^2+y^2} + x\cos(xy) - 3xy^2\right)$$

em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. **(1 ponto)** $\vec{F}$ é conservativo? Se sim, determine um potencial para $\vec{F}$. Justifique.

$\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$, com $\vec{G} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\vec{H} = \left(y\cos(xy) + 2x - y^3, \frac{x}{x^2+y^2} + x\cos(xy) - 3xy^2\right)$. TEMOS QUE

$f(x,y) = sen(xy) + x^2 - xy^3$ É UM POTENCIAL P/ $\vec{H}$,

LOGO, SE $\vec{F}$ FOSSE CONSERVATIVO, ENTÃO $\vec{G} = \vec{F} - \vec{H}$ TAMBÉM SERIA, O QUE É UM ABSURDO.

$\therefore$ $\vec{F}$ NÃO É CONSERVATIVO.

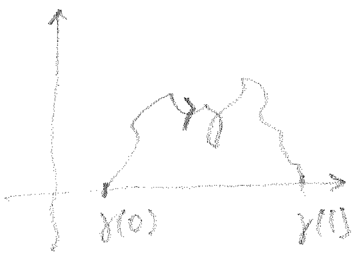
2. **(1 ponto)** Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (1 + t^2 + 3t^6 + \text{sen}(t - t^2), 1 - \cos(t^2 - t))$. Calcule

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma.$$

TEMOS QUE $\gamma(0) = (1,0)$, $\gamma(1) = (5,0)$ E QUE γ TEM IMAGEM CONTIDA NO 1º QUADRANTE, POIS $0 \leq \{1 + sen(t^2 - t)\} + t^2 + 3t^6$ E $0 \leq 1 - \cos(t^2 - t)$.

LOGO,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \underbrace{\int_\gamma \vec{G}\, d\gamma}_{\text{VARIAÇÃO DE ÂNGULO}} + \underbrace{\int_\gamma \vec{H}\, d\gamma}_{= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))} = 0 + \left((0 + 5^2 - 0) - (0 + 1^2 - 0)\right) = 24.$$



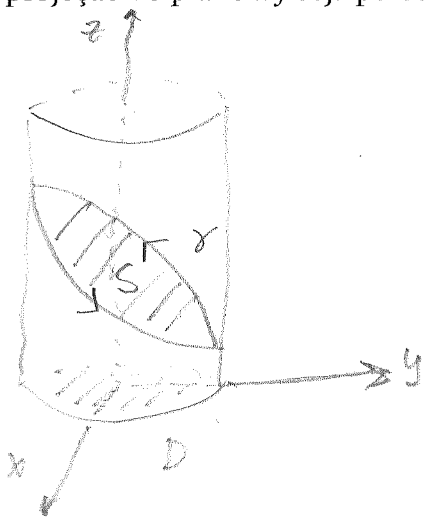
Questão 4 (2 pontos) Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}$ é o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2z + y + \ln(1+x^2))\vec{i} + (xy^2 + x + e^{y^3})\vec{j} + (z^2 - \cos(3z))\vec{k}$$

e γ a curva de intersecção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $x^2+y^2=4$ orientada de forma que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.



$\text{rot}\,\vec{F} = (0, x^2, y^2)$

$S: \sigma(u,v) = (u, v, 1-u-v)$,

$(u,v) \in D: u^2+v^2 \le 4$

$\vec{n}(u,v) = (1,1,1)$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$= \iint_D (0, u^2, v^2)\cdot(1,1,1)\,du\,dv$$

$$= \iint_D (u^2+v^2)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 = 8\pi.$$

Questão 5 (2 pontos) Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}$ é o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = ((1+x^2+\operatorname{sen}x)^x + \ln(1+x^2+y^4))\vec{i} + (xy^2+e^{-y^4})\vec{j} + (6z^4 - 6\cos(z-5))\vec{k}$$

e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

γ PARAMETRIZA A INTERSECÇÃO DO PARABOLÓIDE $z = 3x^2+4y^2$ COM O CILINDRO $z = x^2+y^2$.

$$S: \quad \sigma(u,v) = (u, v, 3u^2+4v^2), \quad (u,v)\in D: u^2+v^2 \le 1$$

$$\vec{n}(u,v) = (-6u, -8v, 1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(0, 0, y^2 - \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}\right)$$

PELO TEO. DE STOKES,

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D \left(0,0,v^2 - \frac{4v^3}{1+u^2+v^4}\right)\cdot(-6u,-8v,1)\,du\,dv$$

ÍMPAR EM y + SIMETRIA

$$= \iint_D \left(v^2 - \frac{4v^3}{1+u^2+v^4}\right) du\,dv = \iint_D v^2\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.$$