UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2

☆ Integração imprópria

1. Classifique as integrais impróprias em *divergentes*, *absolutamente convergentes* e *condicionalmente convergentes* $(\alpha, \beta > 0)$:

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (3) $\displaystyle\int_1^\infty \log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ (6) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)dx$ (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)dx$ (9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^\alpha)dx$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}dx$ (11) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ (12) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ (14) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5+3x^2-7}{x^6+3x^2+3}dx$ (15) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+\sin x}{x^3+5\ln x}dx$

(16) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ (17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ (18) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$

(19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ (20) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (21) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$

(22) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}dx$ (23) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin(1/x)dx$ (24) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

(25) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}$ (26) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+2012}}{\sqrt[3]{x^7+3x^3+2}}dx$ (27) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(28) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ (29) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx$ (30) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^5+7x^4+11}}dx$

(31) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (32) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^3}dx$ (33) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x^2-1)e^{-x^2}}{x^4+x^2+7}dx$

(34) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}$ (35) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ (36) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-x^3}dx$

(37) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ (38) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx$ (39) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}dx$

(40) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta dx$ (41) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^\alpha(\sin x)^\beta dx$ (42) $\displaystyle\int (\log x)^\alpha dx$

(43) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sin x+6}{x^2+1}dx$ (44) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x dx$ (45) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec x dx$

(46) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{x}dx$ (47) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}$ (48) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$

(49) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\sin(2x)}{x}dx$ (50) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^\alpha}dx$ (51) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$

(52) $\displaystyle\int_0^1 \log x\sin(1/x)dx$ (53) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2(1/x)dx$ (54) $\displaystyle\int_0^1 \log x\log(1+x)dx$

(55) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx$ (56) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}dx$ (57) $\displaystyle\int_0^\infty x^x e^{-x^\alpha}dx$

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

(1) $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2} t\sin(2t-1)dt$ (2) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3} t^{1/2}e^t dt$ (3) $\displaystyle f(x)=\int_{3-2x^2}^{\log x} \cos(t^2)dt$

(4) $\displaystyle f(x)=\int_0^{5\sin x} \frac{e^{3t^2}}{t^2+1}dt$ (5) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (x-t)e^{-t^2}dt$ (6) $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2+7} (x+t)\sin t dt$

(7) $\displaystyle f(x)=\int_{-\infty}^{\sin x} e^{-t^2}dt$ (8) $\displaystyle f(x)=\int_{-\infty}^{e^x} \frac{3-2t^4}{1+t^8}dt$ (9) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^\infty e^{-t}\log t dt$

(10) $\displaystyle f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2}dt$ (11) $\displaystyle f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2)dt$ (12) $\displaystyle g(x)=\int_{\sin x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$

(13) $\displaystyle f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ (14) $\displaystyle f(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)dt$ (15) $\displaystyle f(x)=\int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{t^2+a^2}dt,\ a>0$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y=y(x)=\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$$

Prove que $y''+y=f(x)$ e $y(0)=y'(0)=0$, para todo $x\in I$.

4. Mostre que $\displaystyle f(x)=\int_0^{1/x}\frac{1}{t^2+1}\,dt+\int_0^x\frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

5. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

para $x>0$.

(a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x>0$.

(b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, para todo $x>0$.

(c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n)=(n-1)!$ para todo inteiro $n>0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

(d) Use o ítem (b) para definir Γ em toda a reta, exceto nos inteiros não-positivos.

(e) Mostre que $\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 0$.

(f) Mostre que Γ é uma função infinitamente diferenciável (exceto nos inteiros não-positivos) e calcule suas derivadas.

(g) Mostre que

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} d^s\,,\ x > 0\,.$$

6. Para $x, y > 0$, considere a função *Beta de Euler* definida para $x, y > 0$ por

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt\,.$$

(a) Verifique que B é bem-definida (i.e., a integral converge).

(b) Mostre que $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$, para $x, y > 0$.

(c) Mostre que

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^\infty (\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1} dt$$

e

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du\,.$$

(d) Integrando a função $f(t,u) = e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1}$ em $t^2+u^2 \le R^2$, $t \ge 0$, $u \ge 0$, e comparando com a integral sobre quadrados inscritos e circunscritos conclua que

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

(e) Mostre que

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(n+1)} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+3/2)} = \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\,.$$

7. (Transformada de Laplace) Dada $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, a *transformada de Laplace de f* é definida como

$$\mathscr{L} f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t) dt\,,$$

para $x > 0$. A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil para resolver certas equações diferenciais.

(a) Dizemos que f é de *crescimento exponencial* se existem $\alpha, a, M > 0$ tais que $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ para todo $t > a$. Mostre que se f é de crescimento exponencial então $\mathscr{L} f$ é bem-definida (i.e., a integral converge) para todo $x > 0$.

(b) Mostre que se f é de crescimento exponencial e diferenciável então $\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L} f(x) - f(0)$. Encontre uma fórmula semelhante para $\mathscr{L}(f'')$

(c) Seja H_α a função que vale 1 se $t \ge \alpha$ e zero se $0 < t < \alpha$. Calcule $\mathscr{L} H_\alpha(x)$.

(d) Verifique as seguintes igualdades ($n \in \mathbb{N}$):

(1) $\mathscr{L}(1) = 1/x$ (2) $\mathscr{L}(e^{\alpha}t) = (x-\alpha)^{-1}$, $x > \alpha$ (3) $\mathscr{L}(t^n) = n!x^{-n-1}$

(4) $\mathscr{L}(t^{\alpha}) = \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha-1}$ (5) $\mathscr{L}(\sin(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ (6) $\mathscr{L}(\sinh(\alpha t)) = \dfrac{\alpha}{x^2-\alpha^2}$, $x > |\alpha|$

(7) $\mathscr{L}(\cos(\alpha t)) = \dfrac{x}{x^2+\alpha^2}$ (8) $\mathscr{L}(\cosh(\alpha t)) = \dfrac{x}{x^2-\alpha^2}$, $x > |\alpha|$ (9) $\mathscr{L}(t^n e^{\alpha}t) = n!(x-\alpha)^{-n-1}$

8. (Função Erro) A função *Erro* é definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que a função erf é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico da função erro.

(c) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ e use este fato e a mudança de variável $t^2 = u$ para mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

9. (Função seno integral) A função *Seno integral* é definida como

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

(a) Mostre que a função Si é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico de Si e mostre que $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Si}(x) = \pi/2$.

10. Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e assuma que exista a integral imprópria $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

(a) É verdade que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Caso seja falso, encontre um contra-exemplo.

(b) Assuma que $f(x) > 0$ para todo $x > a$. É verdade que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Caso seja falso, encontre um contra-exemplo.

(c) Mostre que se f é decrescente e $f(x) > 0$ para todo $x > a$ então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

11. Determine para que valores de $t \in \mathbb{R}$ as seguintes integrais são uniformemente convergentes:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t^2}$ (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2tx)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(tx)}{x^2+1}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx$ (7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x(x^2+1)}\,dx$

12. Verifique as igualdades abaixo (m, n são inteiros positivos e $a, y > 0$)[1]:

[1]Neste problema, Ei denota a função *exponencial integral* definida por $\operatorname{Ei}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{n+1}}\,dx = \frac{1}{n^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{e^{-a}\mathrm{Ei}(a) - e^{a}\mathrm{Ei}(-a)}{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ay})$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ay}}{2a}$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin(xy)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ay}$

(6) $\displaystyle\int_0^\infty x^n(1+x)^{-n-m+1}\,dx = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$

(8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos(xy)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-y^2/4a}$

(11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2/x^2}\,dx = \sqrt{\pi}e^{-2y}$

(12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(yx^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}$

13. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi\,.$$