UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. Zeca Eidam

Lista 3 - Treino de sequências e séries

✰ Sequências e séries de números reais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

(1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$ (2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$ (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$

(4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ (5) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$ (6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

(7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ (9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

(10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$ (11) $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ (12) $a_n = \operatorname{sen} n$

(13) $a_n = \frac{2n+\operatorname{sen} n}{5n+1}$ (14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$ (15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(16) $a_n = \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$ (17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$ (18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

(19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(22) $a_n = n - n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ (23) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $0 < a < b$ (24) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

(25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (26) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\operatorname{sen}(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}}$ (27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (30) $a_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$ (33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

(34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

(37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (38) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (39) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(40) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (41) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$ (42) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

(43) $a_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (44) $a_n = \sqrt[n]{n^4+2012n^3-5}$ (45) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(46) $a_n = \frac{n!^2}{n^{2n}}$ (47) $a_n = \frac{5^n}{2^n+3^n+4^n}$ (48) $a_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$

(49) $a_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$ (50) $a_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (51) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

   (a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ converge para 2.

4. Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$.

5. Decida se cada uma das séries abaixo é convergente e calcule sua soma quando possível:

   (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}+2^n\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, t^{\frac{k}{2}}$, $0<t<1$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u^n(1+u^n)$, $|u|<1$

   (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $|x|<1$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}^{2n}x$, $|x|<\frac{\pi}{2}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n/2}}$

   (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\operatorname{sen} n}$

   (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n+2012}}$ (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

6. Verifique se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente, justificando sua resposta:

   (1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^{\lambda}}$, $\lambda>0$

   (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^2}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\,\sqrt[5]{n^3+5}}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$

   (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ (10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ n)^n}$ (11) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\ n}{n^2}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$, $p>0$

   (13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$, $p>0$ (14) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ (16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^n}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\arctan n)^n}$

(21) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (24) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

(25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt[17]{n}}$ (27) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ (28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

(29) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p>0$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\cos(1/n))$ (31) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ (32) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^p}$, $p>0$ (34) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$ (35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p e^n}$, $p>0$ (36) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n!$

(37) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, $p>0$ (38) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[4]{n^3+6}}\right)$ (39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[8]{n^7+3n^3-2}}{\sqrt[6]{n^9+7n^2}}$ (40) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$

(41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{e^{-an}}$, $a,p>0$ (42) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^p$, $a,p>0$ (43) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ (44) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ (46) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2012} e^{-n/3}$ (47) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ (48) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

7. Classifique as séries abaixo absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ (4) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln\ n}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ (6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ (7) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}$, $p>0$ (10) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$, $p>0$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! e^{-n}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$, $p>0$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot \ldots (2n)}{3\cdot 5\cdot (2n+1)}$ (19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n^2+3n}}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+7\sqrt{n+2}}$ (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}}$ (24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)}$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{tg}(1/n)$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{e^{n^2}}$ (27) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(7n)}{9+5^n}$ (28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n}$

(29) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$ (31) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+4}$ (32) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n!)}{\sqrt[3]{n^4+\operatorname{sen} n}}$

8. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cada sequência $\{x_n\}$ a seguir, justificando suas respostas:

(1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (2) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ (3) $x_n = \sqrt[n]{n^4+2011n^3-5}$

(4) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (5) $x_n = \frac{5^n}{3^n+5^n+7^n}$ (6) $x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$

(7) $x_n = \sqrt[n]{n!}$ (8) $x_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$ (9) $x_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$

(10) $x_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (11) $x_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (12) $x_n = \frac{n!}{n^n}$

(13) $x_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (14) $x_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (15) $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

9. Prove as afirmações abaixo a respeito de um par de sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ de números reais:

① $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ para qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}_k$.

② Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = c-a$.

③ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \neq 0$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{c}$.

④ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{c}{a}$.

⑤ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Se k é ímpar, mostre que o resultado vale também para $a > 0$.

⑥ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} {x_n}^r = a^r$.

⑦ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se e só se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

⑧ Se $\lim_{n\to\infty} x_n > a$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \geq N$.

⑨ Se existem $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ e $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$ então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

⑩ Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

10. Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

11. Mostre que se uma sequência monótona tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

12. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \geq 1$.

① Mostre que $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

13. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n}$, $n \geq 1$.

① Mostre que $\{x_n\}$ é limitada .

② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

14. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

15. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$\alpha \doteq \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é limite de alguma subsequência de } \{x_n\}\right\},$$

$\beta \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $\gamma \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}$.

Mostre que os números α, β, γ são bem definidos e $\alpha = \beta = \gamma$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

16. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes a respeito de uma sequência $\{x_n\}$ de números reais:

    (a) Existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;

    (b) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = a$.

17. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.

    ① Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

    ② Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

    ③ Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

18. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências limitadas. Verifique as seguintes afirmações:

    ① $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

    ② $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$;

    ③ $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$;

    ④ $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande;

    ⑤ $\liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande.

    ⑥ Encontre situações nas quais as desigualdades acima são estritas.

    ⑦ Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$, então $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$ e $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n$.

19. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \geq x_n$ para todo $n \geq k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \text{ é um termo destacado}\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

    ① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

    ② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

    ③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

20. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

    ① Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n$ para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha = \sup X$ existe e $\alpha \leq M$.

    ② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

    ③ Conclua que existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = a$.

21. Neste problema, vamos usar o método da *caça ao leão* para provar o resultado já provado no exercício anterior. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada.

    ① Não há perda de generalidade em supor que $0 \leq x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    ② Escreva $J_0 = [0,1]$ como reunião $I_1 \cup I_2$ de dois intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{2}$. Mostre que para algum destes dois intervalos I é verdade que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in I\}$ é infinito. Chame tal intervalo de J_1.

    ③ Prosseguindo indutivamente, obtemos intervalos fechados $[0,1] \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots J_k \supset \ldots$ de comprimento $\frac{1}{2^k}$, tais que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in J_k\}$ é infinito, para todo $k \in \mathbb{N}$.

    ④ Mostre que existe um único ponto $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$, o qual é limite de uma subsequência de $\{x_n\}$.