UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

☆ Sequências de funções

1. Verifique o tipo de convergência das sequências de funções abaixo nos domínios D indicados ($a > 0$):

(1) $f_n(x) = x/n$, $D = \mathbb{R}$

(2) $f_n(x) = x/n$, $D = [a,b]$

(3) $f_n(x) = n\sin(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(4) $f_n(x) = n\sin(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(5) $f_n(x) = 1/nx^2$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(6) $f_n(x) = 1/nx^2$, $D = \mathbb{R}\setminus(-a,a)$

(7) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2+1}$, $D = \mathbb{R}$

(8) $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2+1}$, $D = \mathbb{R}$

(9) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2+1}$, $D = \mathbb{R}\setminus(-a,a)$

(10) $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{x^{2014}+1}$, $D = \mathbb{R}$

(11) $f_n(x) = \sin(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(12) $f_n(x) = n\arctan(x/n)$, $D = [a,b]$

(13) $f_n(x) = \sin(x/n)$, $D = [a,b]$

(14) $f_n(x) = \cos(nx)$, $D = \mathbb{R}$

(15) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^4+1}$, $D = [0,1]$

(16) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $D = \mathbb{R}$

(17) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $D = [0,a]$

(18) $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1+nx^2}{n}}$, $D = [a,b]$

(19) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^n+1}$, $D = [0,\infty)$

(20) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^n+1}$, $D = [0,a]$

(21) $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $D = [a,b]$

(22) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}$

(23) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $D = [0,1]$

(24) $f_n(x) = n^{3/2}xe^{-n^2x^2}$, $D = [-1,1]$

(25) $f_n(x) = \cos^n x$, $D = [0,\pi]$

(26) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $D = [0,\pi]$

(27) $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $D = [0,1]$

(28) $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $D = [0,1]$

(29) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $D = [a,b]$

(30) $f_n(x) = x^{n+1}-x^n$, $D = [0,1]$

(31) $f_n(x) = \dfrac{1-\cos(nx)}{n}$, $D = \mathbb{R}$

(32) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, $D = [0,1]$

(33) $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$, $D = (0,+\infty)$

(34) $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$, $D = [a,b]$

(35) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $D = \mathbb{R}$

(36) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $D = [0,1]$

(37) $f_n(x) = \dfrac{nx+x^2}{n^2}$, $D = \mathbb{R}$

(38) $f_n(x) = nx(1-x^4)^n$, $D = [0,1]$

(39) $f_n(x) = \dfrac{n+\arctan(nx+3)}{3n+5}$, $D = \mathbb{R}$

(40) $f_n(x) = \dfrac{xe^{-x/n}}{n}$, $D = [0,\infty)$

(41) $f_n(x) = \dfrac{xe^{-x/n}}{n}$, $D = [0,a]$

(42) $f_n(x) =$, $D = \mathbb{R}$

2. Mostre que se $\{f_n\}$ é uma sequência *monótona* de funções reais contínuas definidas em $[a,b]$ que converge pontualmente para uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ então a convergência é, de fato, uniforme em $[a,b]$. (Teorema de Dini)

3. Mostre que se $\{f_n\}$ converge uniformemente em X_1 e em X_2, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em $X_1\cup X_2$. O resultado pode ser estendido para qualquer quantidade finita de conjuntos. E para uma quantidade infinita de conjuntos?

4. Mostre que se $\{f_n\}$ converge uniformemente em X, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em qualquer subconjunto de X.

5. Uma função $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita *simples* se existem $E_1,\dots,E_N\subset[a,b]$ tais que φ é constante em cada um dos E_j's. Mostre que toda função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é limite uniforme de uma sequência de funções simples.

6. Uma função contínua $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita *linear por partes* se o seu gráfico consiste de uma quantidade finita de segmentos de reta. Mostre que toda função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é limite uniforme de uma sequência de funções lineares por partes.

7. Sejam $f_n, g_n: X\to\mathbb{R}$ sequências de funções tais que $f_n\to f$ e $g_n\to g$ uniformemente.

   ① Mostre que $f_n+g_n\to f+g$ uniformemente.

   ② Se $\{a_n\}$ é uma sequência de números reais tal que $a_n\to a$ então $a_nf_n\to af$.

   ③ Mostre que $f_ng_n\to fg$ pontualmente, mas a convergência pode não ser uniforme.

   ④ Mostre que se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são sequências limitadas então $f_ng_n\to fg$ uniformemente.

   ⑤ Se existe $\alpha>0$ tal que $|f_n(x)|\geq\alpha$ para todos $n\in\mathbb{N}$ e $x\in X$, mostre que $1/f_n\to 1/f$.

   ⑥ Se $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua, mostre que $\varphi\circ f_n\to\varphi\circ f$ uniformemente.

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função e considere a sequência de funções $f_n(x)=f(x+1/n)$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

   ① Mostre que $f_n\to f$ pontualmente se e só se f é contínua em $\mathbb{R}$.

   ② Mostre que $f_n\to f$ uniformemente se e só se f é *uniformemente* contínua em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma sequência de funções que converge pontualmente para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\{a_n\}$ uma sequência de números reais que converge para a.

   ① Mostre que a sequência $g_n(x)=f_n(x+a_n)$ converge pontualmente para $f(x+a)$.

   ② Que condições devemos assumir para que $g_n(x)\to f(x+a)$ uniformemente?

10. Considere a sequência de funções $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

    ① Mostre que $f_n\to e^x$ pontualmente.

    ② Mostre que $f_n\to e^x$ uniformemente em cada intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

    ③ Mostre que $\left(\dfrac{n^2+\sqrt[n]{n!}}{n^2}\right)^n\to e^{1/e}$ e $\left(\dfrac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n\to e^e$.

11. Mostre que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ se e só se
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

12. Seja $\mathrm{B}(X)$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma, produto escalar e produto de funções. Defina, para $f \in \mathrm{B}(X)$,
$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x\in X} |f(x)|.$$
   (a) Mostre que $\|f\|_\infty \geq 0$ e $\|f\|_\infty = 0$ se e só se $f = 0$, para toda $f \in \mathrm{B}(X)$.
   (b) Mostre que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathrm{B}(X)$.
   (c) Mostre que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, para todas $f, g \in \mathrm{B}(X)$.
   (d) Dadas $f_n \in \mathrm{B}(X)$, mostre que $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ se e só se $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   (e) Mostre que $\{f_n\} \subset \mathrm{B}(X)$ é uma sequência de Cauchy no sentido descrito em aula se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$.
   (f) Encontre uma sequência $\{f_n\} \subset \mathrm{B}(X)$ tal que $\|f_n\|_\infty = 1$, $n \in \mathbb{N}$, que não possui subsequência uniformemente convergente.

13. Sejam $D \subset [a, b]$ denso e $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas tal que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente para todo $x \in D$. Mostre que se f é uniformemente contínua então $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b]$.

14. Seja $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções tal que, para toda sequência convergente $\{x_n\} \subset [a, b]$ tem-se que $f_n(x_n) \to 0$ uniformemente. Mostre que $f_n \to 0$ uniformemente.

15. Seja $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções tais que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$, para todos $x, y \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \to f$ pontualmente, mostre que a convergência é, de fato, uniforme.

16. Seja $\{r_1, \ldots, r_n \ldots\}$ uma enumeração dos racionais em $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como 1 em cada um dos pontos $r_1, \ldots, r_n$ e zero fora. Mostre que $f_n \to \chi$ pontualmente, onde χ é a função de Dirichlet (vale 1 nos racionais e zero fora). Portanto, o limite pontual de funções integráveis segundo Riemann pode não ser integrável segundo Riemann.

17. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções que converge uniformemente para f em $I \setminus \{x_0\}$. Se existe $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

18. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$, dizemos que uma sequência $f_n : I \to \mathbb{R}$ converge para $f : I \to \mathbb{R}$ na norma L^p se
$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \to 0.$$
Este fato será denotado por $f_n \to f$ (L^p).

   (a) Mostre que se I é limitado então convergência L^1 implica convergência L^p para todo $p > 1$.

(b) Mostre que se I é limitado então convergência uniforme implica convergência L^p para todo $p > 1$.

(c) Considere a sequência $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada como segue: fixado $n \geq 1$, escreva $n = 2^k + l$, com $0 \leq l < 2^k$ e defina f_n valendo 1 no intervalo $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ e zero fora. Mostre que $f_n \to 0$ (L^1) mas $\{f_n\}$ não converge nem pontualmente para nenhuma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(d) Mostre que $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, converge para zero na norma L^p.

(e) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função linear por partes que vale zero nos intervalos $[0, 1/n]$, $[2/n, 1]$ e vale n em $x = 3/2n$. Mostre que $\{f_n\}$ converge para zero pontualmente mas não na norma L^p.