UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

☆ Limsup e liminf

1. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e consideremos a sequência monótona $\{b_n\}$ definida por $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$. Considere os seguintes números:

$$\begin{aligned} A &\doteq \sup\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\}, \\ B &\doteq \lim_{n\to\infty} b_n, \\ C &\doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}. \end{aligned}$$

Mostre que os números A, B, C são bem definidos e $A = B = C$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

2. Verifique as seguintes afirmações a respeito de uma sequência $\{x_n\}$ de números reais:

① Se $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

② Se $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

③ Se $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

3. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências limitadas. Verifique as seguintes afirmações:

① $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

② $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$;

③ $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$;

④ $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande;

⑤ $\liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande.

⑥ Encontre situações nas quais as desigualdades acima são estritas.

⑦ Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$, então $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$ e $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n$.

☆ **Séries de funções**

4. Verifique se as séries de funções abaixo convergem uniformemente nos domínios indicados $(a, \varepsilon > 0)$:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$, $D = [-a, a]$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^{3/2}}$, $D = \mathbb{R}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-nx}$, $D = [1, \infty)$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx^3)}{n^3}$, $D = \mathbb{R}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\varepsilon}(1+nx^2)}$, $D = [-a, a]$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$, $D = \mathbb{R}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $D = [1+\varepsilon, \infty)$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $D = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{\sqrt[4]{n}}$, $D = [0, 1]$ (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$, $D = [1+\varepsilon, \infty)$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{\sqrt[7]{2n^5+3}}$, $D = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $D = [0, \infty)$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2^n + \sqrt{n}}$, $D = (0, 1)$ (15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin(x/n^2)$, $D = [-a, a]$

5. Verifique que valem as igualdades abaixo, com convergência uniforme nos subconjuntos compactos dos respectivos domínios:

(a) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\displaystyle \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\displaystyle \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

(e) $\displaystyle \arctan\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \leq 1$ (f) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$, $|x| < 1$

6. Utilizando as séries do exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

(a) e, com erro inferior a 10^{-5}.

(b) $\sin 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}.

(c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}.

(d) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}.

(e) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ com erro inferio a 10^{-6}.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ com erro inferior a 10^{-6}.

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos(x^4)-1}{x^8}\,dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

(h) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}, usando que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$, (esta igualdade segue da identidade $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.)

7. Expanda as funções abaixo em série de potências em torno do ponto x_0 indicado e determine o raio de convergência da série obtida:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 \neq 0$ (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, $x_0 \neq \pm 2$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, $x_0 \neq 3$

(d) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ (e) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$ (f) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$

8. Determine o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4^n} x^n$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3+1}$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(x-5)^n}{n3^n}$ (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$ (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}(x+3)^n$ (10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ (11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{4^n}(x-4)^{2n}$ (12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ (14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n4^n} x^n$ (15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ (16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^{n^2}$ (18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$ (19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^{3n}$ (20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} x$

(21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ (22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, $b > a > 0$ (23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$ (24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

(25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$ (26) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$ (27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^{n!}$ (28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} x^n$

(29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2\cdot 4\cdot \ldots (2n)}{3\cdot 5\cdot (2n+1)} x^n$ (30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n^2+3n}} x^{4n}$ (31) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n}{3^n+4^n} x^n$ (32) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) x^n$

(33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{10^n n!} x^n$ (34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{1+7\sqrt{n+2}} x^{2n}$ (35) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}} x^n$ (36) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)} x$

(37) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin(7n)}{9+5^n} x^{(2n)!}$ (38) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right) x^n$ (39) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n n!}{e^{n^2}} x^n$ (40) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \tan(1/n) x$

(41) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$ (42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \log n}{3^n n\sqrt{n}} x^n$ (43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^{3n}}$ (44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)\log(n+1)}$

9. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 8^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 9^n$

10. Desenvolva as seguintes funções em série de potências em torno da origem, indicando os intervalos de convergência:

(a) $f(x) = x^2 e^x$ (b) $f(x) = \cos(x+2)$ (c) $f(x) = \sin(x^2)$

(d) $f(x) = \cos^2 x$ (e) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (f) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

(g) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ (h) $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$ (i) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$

(j) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ (k) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ (l) $f(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

(m) $f(x) = \ln(1+x)$ (n) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$ (o) $f(x) = e^{-x}\cos x$

11. Usando derivação e integração termo a termo, calcule as somas das séries de potências abaixo:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^n$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

12. Use as séries do exercício anterior para calcular:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5^n} = \frac{625}{256}$

13. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ convergem uniformemente em $\mathbb{R}$.

14. Prove as identidades abaixo, chamadas de *Sophomore dreams*:[1]

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Sugiro escrever $x^x = e^{x \log x}$, expandir em série de potências e integrar (justificando cada passo). Pode fazer que dá certo.

15. Integre a igualdade $1 + t + \ldots + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ entre zero e $x \in (-1,1)$ para concluir que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

para $-1 < x \leq 1$. Em particular, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

[1] *Sonho de um aluno de segundo ano*, numa tradução livre. É algo bom demais para ser verdade, e que, surpreendentemente, é.

16. Integre a igualdade $1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$ entre zero e $x \in (-1,1)$ para concluir que

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

para $-1 \leq x \leq 1$. Em particular, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

17. Na teoria de equações diferenciais ordinárias, um tipo bastante importante de equação é a *equação de Bessel de ordem* ν:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

onde $y = y(x)$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Uma solução para a equação acima é simplesmente uma função duas vezes derivável que satisfaz a equação.

   (a) Encontre uma solução para a equação (1) quando $\nu = 0$ da forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. A solução J_0 obtida fazendo $a_0 = 1$ é chamada de *função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero.* Determine o raio de convergência da solução.

   (b) Encontre uma solução J_n para a equação (1) para $\nu \in \mathbb{N}$ da forma $x^\nu \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

   (c) Use a função Γ para estudar o caso $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$ e obter as funções J_ν.

   (d) Mostre que $J_{1/2}(x) = \left(\dfrac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$.

18. (Série binomial) Seja α um número real *não-inteiro*. Neste exercício, vamos encontrar uma expansão em série de potências para $(1+x)^\alpha$ em torno de $x = 0$.

   (a) Mostre que $y = (1+x)^\alpha$ é a única solução da equação $(1+x)y' = \alpha y$ em $(-1, \infty)$ satisfazendo $y(0) = 1$.

   (b) Mostre que a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

   tem raio de convergência 1.

   (c) Mostre que $1 + g(x)$ satisfaz a mesma equação do ítem (a) e vale 1 em $x = 0$. Conclua que para todo α não-inteiro vale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

   se $|x| < 1$.

   A série acima é chamada de *série binomial* e foi estudada primeiramente por Newton. A igualdade acima generaliza a fórmula usual do binômio de Newton e nos induz a definir para α não-inteiro e $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente binomial $\dbinom{\alpha}{n} \doteq \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$. Casos historicamente importantes são $\alpha = \pm 1/2$. Dessa forma, temos para cada $x \in (-1,1)$ que

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(d) Mostre que a série binomial converge *uniformemente* em $[-1,1]$. Aqui, pode ser útil o *critério de Raabe*, o qual afirma que se

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $L>1$ ou $L=+\infty$ e diverge se $0\le L<1$.

19. Use a série binomial com $\alpha=-1/2$ e integre termo-a-termo para provar que

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para todo $x\in[-1,1]$. Em particular, conclua que

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{1}{2n+1}.$$

20. Prove que a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analíticas reais é analítica real.

21. Considere $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função 2-periódica que vale x em $[0,1]$ e $2-x$ em $[1,2]$. Mostre que a função

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$$

é contínua em toda a reta mas *não* é derivável em nenhum ponto.

22. Mostre que a função

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2^{n/2}}\cos(2^n x),\ x\in\mathbb{R},$$

é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$, mas não é analítica em nenhum ponto.

23. Verifique que $f(x)=e^{-1/x}$, $x>0$ e $f(x)=0$ para $x\le 0$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ mas não é analítica na origem. E nos demais pontos?

24. Seja $f: I\times[a,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua e admita que exista a integral imprópria $F(t)=\int_a^\infty f(t,x)dx$ para todo $t\in I$. Considere a sequência de funções

$$F_n(t)=\int_a^n f(t,x)dx,\ t\in I,\ n\in\mathbb{N}.$$

Mostre que a integral $\int_a^\infty f(t,x)dx$ converge uniformemente em I se e só se $\{F_n\}$ converge uniformemente para F em I.

25. (Teorema de Borel) Mostre que dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, existe uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f^{(n)}(0)=a_n$, para todo $n\ge 0$.

26. Considere a função ζ *de Riemann* dada por

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s>1.$$

Mostre que ζ é uma função de classe C^∞. Tente mostrar que ζ é analítica real.

27. Mostre que para todo $s > 1$,

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

uniformemente para x em qualquer compacto de $\mathbb{R}$. Integre termo-a-termo e conclua que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \zeta(s)\Gamma(s)$$

para todo $s > 1$.

28. Se $1 < p_1 < p_2 < \ldots$ denota a sequência dos inteiros primos, mostre (ou pelo menos, convença-se) que

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}.$$