**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CM111 - Análise II**
**Prof. Zeca Eidam**

# Lista 6

## ✩ Funções analíticas reais

1. Mostre que cada uma das funções a seguir é analítica real em seu domínio. Exiba a expansão em série de potências em torno de cada ponto. determinando o respectivo raio de convergência:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (f) $f(x) = e^{x^5}$ (g) $f(x) = \ln(1+x^4)$ (h) $f(x) = \arctan x$

   (i) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (j) $f(x) = \cos(x^2-1)$ (k) $f(x) = \ln(x^2-1)$ (l) $f(x) = 2^{x^3}$

2. Considere as funções $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $g(x) = \sec x$ em seus domínios usuais.

   (a) Mostre que $f$ e $g$ são analíticas reais em todo seu domínio.

   (b) Determine a expansão em série de potências destas funções em torno da origem.

   (c) Use o teorema de Bernstein para mostrar que estas séries convergem no intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita de classe $C^\infty$ se for de classe $C^\infty$ em $(a,b)$ e as derivadas $f^{(n)}$ forem contínuas em $[a,b]$. Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^\infty$, mostre que existe uma $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ tal que $\tilde{f}|_{[a,b]} = f$. Verifique se é possível estender este resultado para classe $C^\omega$.

4. Usando as estimativas de Cauchy, verifique se as séries de potências abaixo podem ser a série de Taylor na origem de uma função analítica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-n}x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2+3)}{2^n}x^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-n!}x^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}x^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n\ln(1+n^2)}x^n$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{2^{-n}+n^2}\,x^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln n x^{2n}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^3-5n^6+\operatorname{tg}(e^n)}{n+e^n}x^n$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-3n}\operatorname{sen}(n^2+3)}{n^3+4n+13}x^n$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^n}x^{4n-3}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))x^{2n+1}$