UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. Zeca Eidam

5a. Lista de Exercícios

✰ Séries de Fourier

1. Determine a série de Fourier das funções abaixo definidas em $[-\pi,\pi)$ e calcule sua soma:

(a) $f(x)=\begin{cases} a, & \text{se } -\pi\leq x<0 \\ b, & \text{se } 0\leq x<\pi \end{cases}$ (b) $f(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha\neq 0$ (c) $f(x)=|x|$

(d) $f(x)=\begin{cases} ax, & \text{se } -\pi\leq x<0 \\ bx, & \text{se } 0\leq x<\pi \end{cases}$ (e) $f(x)=\operatorname{sen}(\alpha x)$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$ (f) $f(x)=\cos(\alpha x)$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$

(g) $f(x)=|\cos x|$ (h) $f(x)=ax+b$ (i) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$

(j) $f(x)=|\operatorname{sen}(\alpha x)|$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$ (k) $f(x)=x^2$ (l) $f(x)=x^3-\pi^2 x$

(m) $f(x)=x^4-2\pi^2x^2$ (n) $f(x)=\pi-x$ (o) $f(x)=x(\pi-|x|)$

(p) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se} -\pi\leq x<0 \\ x, & \text{se } 0\leq x<\pi \end{cases}$ (q) $f(x)=\sinh(\alpha x)$ (r) $f(x)=\cosh(\alpha x)$

(s) $f(x)=(\operatorname{sen} x)^+=\begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } \operatorname{sen} x\geq 0 \\ 0, & \text{se } \operatorname{sen} x<0 \end{cases}$

2. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo (definidas em $[0,\pi)$) e determine sua soma:

(a) $f(x)=ax$ (b) $f(x)=x^2$ (c) $f(x)=ax+b$

(d) $f(x)=\operatorname{sen} x$ (e) $f(x)=|\cos\, x|$ (f) $f(x)=e^{\alpha x}$

3. Verifique as seguintes igualdades, usando as séries de Fourier dos exercícios anteriores:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{\pi}{4}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{\pi-2}{4}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}\operatorname{cossech}(\alpha\pi)-\frac{1}{2\alpha^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}\coth(\alpha\pi)-\frac{1}{2\alpha^2}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{1-\alpha\pi\operatorname{cotg}(\alpha\pi)}{2\alpha^2}$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$

4. Mostre que se $f, g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 por partes que possuem a mesma série de Fourier, então $f = g$.

5. Seja $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 por partes cujos coeficientes de Fourier satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) = 0\,,$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$. Prove que f é de classe C^k e as derivadas de f de ordem menor ou igual a k podem ser obtidas derivando-se a série de Fourier de f, com convergência uniforme da série resultante.

6. Mostre que se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, então para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos $a_n(f) = -\dfrac{b_n(f')}{n}$ e $b_n(f) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) + \dfrac{a_n(f')}{n}$, onde $a_n(g), b_n(g)$ denotam os coeficientes de Fourier da função g.

7. Determine as funções cujas séries de Fourier são dadas abaixo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos nx}{n}$, $|\alpha| < 1$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \operatorname{sen} nx}{n}$, $|\alpha| < 1$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n!}$

8. Determine se as séries trigonométricas abaixo podem ser séries de Fourier de funções das seguintes classes: $\mathscr{L}^1$, $\mathscr{L}^2$, C^1, C^2, etc:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^{13} + 15n^2 - 1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$