UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. Zeca Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 27/03/2018

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido consultar livros e anotações;
2. Você pode utilizar *todos* os resultados provados em aula e deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. Boa prova!

Questão 1 Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras **(V)** ou falsas **(F)**, provando as verdadeiras e exibindo um contraexemplo para as falsas (cada ítem vale **1 ponto**):

(a) O conjunto

$$D = \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N},\, m = 1, 2, 3, \ldots, 2^n \right\}$$

tem conteúdo nulo.

D É ILIMITADO (POIS $D \supset \mathbb{N}$) $\therefore$ D NÃO PODE TER CONTEÚDO NULO. (FALSO)

D TEM MEDIDA NULA (POIS É ENUMERÁVEL)

(b) O conjunto dos números algébricos tem conteúdo nulo.[1]

FALSO O CONJUNTO A FORMADO PELOS NÚMEROS ALGÉBRICOS CONTÉM $\mathbb{Z}$ $\therefore$ É ILIMITADO. COMO A É ENUMERÁVEL, A TEM MEDIDA NULA.

[1]Um número real é dito *algébrico* se for raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

(c) A função

$$f(x) = \int_0^{x^2} \left(t^{1+t^2} - \operatorname{sen}(2t - 1977) e^{3t-1} \right) d\cancel{x}t, \; x > 0,$$

é integrável em qualquer intervalo da forma $[a, b]$ para $0 < a < b$.

VERDADEIRO   PONDO

$$g(y) = \int_0^y \underbrace{\left\{ t^{1+t^2} - \operatorname{sen}(2t - 1977) e^{3t-1} \right\}}_{\doteq h(t)} dt = \int_0^y h(t)\,dt$$

TEMOS QUE g É CONTÍNUA (POIS h INTEGRÁVEL $\Rightarrow$ g CONTÍNUA — PROVADO EM AULA).

COMO $f(x) = g(x^2)$, f É CONTÍNUA, POR SER COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS.

COMO FUNÇÕES CONTÍNUAS SÃO INTEGRÁVEIS, O RESULTADO SEGUE. //

Questão 2 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada.

(a) **(2 pontos)** Dado $A \subset [a,b]$ um conjunto finito, denotemos por $\mathscr{P}_A$ o conjunto das partições de $[a,b]$ que contém A. Mostre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P\in\mathscr{P}_A} s(f;P) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P\in\mathscr{P}_A} S(f;P).$$

SEJA $\mathcal{P}$ O CONJUNTO DE TODAS AS PARTIÇÕES DE $[a,b]$. ENTÃO $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}$. ALÉM DISSO, DADA $P \in \mathcal{P}$, TEMOS QUE $Q \doteq P \cup A \in \mathcal{P}_A$ E É UM REFINAMENTO DE P. PORTANTO,

$$s(f,P) \leq \underbrace{s(f,Q)}_{\in \mathcal{P}_A} \leq \sup_{Q\in\mathcal{P}_A} s(f,Q)$$

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}_A} S(f,Q) \leq \underbrace{S(f,Q)}_{\in \mathcal{P}_A} \leq S(f,P)$$

LOGO,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \doteq \sup_{P\in\mathcal{P}} s(f,P) \leq \sup_{Q\in\mathcal{P}_A} s(f,Q).$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \doteq \inf_{P\in\mathcal{P}} S(f,P) \geq \inf_{Q\in\mathcal{P}_A} S(f,Q).$$

COMO $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}$, ENTÃO $\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq \sup_{Q\in\mathcal{P}_A} s(f,Q)$,

$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \inf_{Q\in\mathcal{P}_A} S(f,Q)$, DE ONDE SEGUEM AS IGUALDADES.

(b) **(2 pontos)** Uma função $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita uma *função-escada* se existirem $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ e $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ tais que ϕ é constante igual a c_j em cada intervalo aberto (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$. Mostre que toda função-escada é integrável e se $f \geq 0$ então

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underbrace{\sup\left\{\int_a^b \phi(x)dx : 0 \leq \phi \leq f \text{ e } \phi \text{ é uma função-escada}\right\}}_{\doteq A}.$$

O CONJ. DE DESCONTINUIDADES DE UMA FUNÇÃO ESCADA É FINITO ∴ DE MEDIDA NULA, LOGO, UMA TAL FUNÇÃO É INTEGRÁVEL

SE $0 \leq \phi \leq f$ E ϕ É UMA FUNÇÃO-ESCADA,

ENTÃO

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \underline{\int_a^b} \phi(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \therefore$$

$$A \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

POR OUTRO LADO, ~~DADA~~ DADA $P: a = x_0 < \ldots < x_n = b$ PARTIÇÃO, SEJA ϕ UMA FUNÇÃO ESCADA TAL QUE

$\phi = m_i$ EM (x_{i-1}, x_i), ONDE $m_i \doteq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \ (\geq 0)$, $i = 1, \ldots, n$.

LOGO, $$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_a^b \phi(x)dx \leq A, \text{ POIS } \phi \leq f.$$

$$\therefore \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f,P) \leq A,$$ DE ONDE CONCLUÍMOS A IGUALDADE. //

Questão 3 Dada função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, definimos a *variação de f em relação à partição P* por

$$\mathrm{V}(f;P) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

Dizemos que f tem variação limitada se $\{\mathrm{V}(f;P) : P \text{ partição de } [a,b]\}$ é limitado; neste caso, o supremo deste último conjunto é chamado de *variação de f em $[a,b]$*, denotado por $\mathrm{V}_a^b(f)$ e f é dita de variação limitada.

(a) **(1 ponto)** Mostre que se f, g são de variação limitada e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f+g$ e λf são de variação limitada e $\mathrm{V}_a^b(f+g) \le \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$ e $\mathrm{V}_a^b(\lambda f) = |\lambda| \mathrm{V}_a^b(f)$.

$\rightarrow$ $V(f+g;P) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)+g(x_j)-f(x_{j-1})-g(x_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)-f(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n} |g(x_j)-g(x_{j-1})| \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$ $\therefore$ $V_a^b(f+g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$

$\rightarrow$ $V(\lambda f) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda f(x_j) - \lambda f(x_{j-1})| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$

$\therefore$ $V_a^b(\lambda f) = |\lambda| V_a^b(f)$, POIS $\sup(cX) = c \sup X$ P/ QUAISQUER $X \subset [0,\infty)$ E $c > 0$.

(b) **(2 pontos)** Mostre que funções monótonas tem variação limitada. O mesmo ocorre com as funções lipschitzianas.

$\rightarrow$ SE f É NÃO-DECRESCENTE, ENTÃO

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|f(x_j) - f(x_{j-1})|}_{\ge 0} = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = f(b) - f(a)$$

$\therefore$ $V(f;P) = f(b) - f(a)$ $\Rightarrow$ $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$.

$\rightarrow$ SE $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$, $x, y \in [a,b]$, ENTÃO

$$V(f;P) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \le M \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = M(b-a)$$

$\therefore$ $V_a^b(f) \le M(b-a)$.

(c) **(2 pontos)** Mostre que uma função de classe C^1 é de variação limitada e $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$. Dê exemplo de uma função contínua que não seja de variação limitada.

COMO $f \in C^1$ ENTÃO f' É CONTÍNUA $\therefore$ LIMITADA, LOGO, EXISTE $M > 0$ TQ $|f(x) - f(y)| \overset{TVM}{=} |f'(c)|\,|x-y| \leq M|x-y|$, $x, y \in [a,b]$. LOGO, f É LIPSCHITZ $\therefore$ DE VARIAÇÃO LIMITADA.

COMO f' É CONTÍNUA E $[a,b]$ É COMPACTO, $|f'|$ É UNIFORMEMENTE CONTÍNUA $\therefore$ DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TQ $|x-y| \leq \delta \Rightarrow ||f'(x)| - |f'(y)|| \leq \varepsilon/_{b-a}$. LOGO, TOMANDO $N \in \mathbb{N}$, $N > 1/\delta$ E A PARTIÇÃO $P_\varepsilon : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $x_j = a + \frac{(b-a)j}{N}$, $j = 1, \dots, N$, TEMOS QUE A OSCILAÇÃO DE f' EM CADA INTERVALO $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ É $\leq \varepsilon$; EM PARTICULAR, SE $M_j \doteq \sup_{x \in I_j} |f'(x)|$,

$m_j \doteq \inf_{x \in I_j} |f'(x)|$, ENTÃO $\underbrace{|f'(x)| \geq M_j - \varepsilon/_{b-a}}_{(a)}$ E

$\underbrace{|f'(x)| \leq m_j + \varepsilon/_{b-a}}_{(b)}$, P/ TODO $x \in I_j$

$f'(x)$, m_j, M_j, $\leq \varepsilon$

$$V(f, P_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} |f'(c_j)|\,(x_j - x_{j-1}), \text{ PARA ALGUM } c_j \in [x_{j-1}, x_j]$$

$\therefore$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(m_j - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_j - x_{j-1}) < \quad \leq \sum_{j=1}^{n} \left(M_j + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_j - x_{j-1}), \text{ POR (a) E (b)}$$

$$s(|f'|, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq V(f, P_\varepsilon) \leq S(|f'|, P_\varepsilon) + \varepsilon$$

COMO $$s(|f'|, P_\varepsilon) \leq \int_a^b |f'(x)|dx \leq S(|f'|, P_\varepsilon),$$

CONCLUÍMOS QUE

$$\left| \int_a^b |f'(x)|dx - V(f, P_\varepsilon) \right| \leqslant 2\varepsilon$$

COMO $$V_a^b(f) = \sup_P V(f,P) = \sup_{Q \supset P_\varepsilon} V(f, Q),$$

CONCLUÍMOS QUE $$\left| \int_a^b |f'(x)|dx - V_a^b(f) \right| \leq 2\varepsilon ;$$

COMO $\varepsilon > 0$ É ARBITRÁRIO, TEMOS $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$.