**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno - 2019/1**
**Prof. Zeca Eidam**

# Lista 1

## ☆ Polinômio de Taylor

1. Calcule o polinômio de Taylor de $f$ de grau $n$ no ponto $x_0$ indicado:

   (1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ (2) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$ (3) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$

   (4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ (5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -1$ (6) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$

   (7) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x_0 = 0$ (9) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$, $x_0 = 1$

   (10) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ (11) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$ (12) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

   (13) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ (14) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (15) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$

2. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 e a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para calcular um valor aproximado para cada um dos números abaixo, estimando o erro:

   (a) $\ln(1,01)$ (b) $\operatorname{sen}(-0,01)$ (c) $\tan(-0,1)$ (d) $\sqrt[4]{16,1}$ (e) $\sqrt{8,97}$

   (f) $\cos(\frac{\pi}{2} + 0,05)$ (g) $e^{0,07}$ (h) $\arctan(0,09)$ (i) $\ln(1,001)$ (j) $\cosh(-0,1)$

3. Use a fómula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar as igualdades abaixo:

   (a) $e^x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\cos x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln(1+x) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $|x| < 1$

   (e) $\arctan x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ (f) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \lim\limits_{N\to\infty} 2\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

4. Utilizando o exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

   (a) $e$, com erro inferior a $10^{-5}$ (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a $10^{-7}$

   (c) $\cos 1$, com erro inferior a $10^{-5}$ (d) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a $10^{-5}$

   (e) $e^2$, com erro inferior a $10^{-5}$ (f) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a $10^{-5}$

   (g) $\pi/4$, com[1] erro inferior a $10^{-5}$ (h) $\cos(1/2)$, com erro inferior a $10^{-5}$

5. Calcule $\dfrac{d^{320}\arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\dfrac{d^{321}\arctan}{dx^{321}}(0)$

6. Estime as integrais abaixo:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, com erro inferior a $10^{-5}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t^3}\,dt$, com erro inferior a $10^{-7}$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^4)\,dt$, com erro inferior a $10^{-2}$ (d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, com erro inferior a $10^{-7}$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, com erro inferior a $10^{-6}$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t^2)}{t}\,dt$, com erro inferior a $10^{-7}$

7. Utilizando os polinômios de Taylor das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{x^5}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$

### ☆ Curvas

8. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (1) $\gamma(t)=(1,t)$
   (2) $\gamma(t)=(\cos^2 t,\operatorname{sen} t)$, $0\le t\le 2\pi$
   (3) $\gamma(t)=(\operatorname{sen} t,\operatorname{sen}^2 t)$
   (4) $\gamma(t)=(2+\cos t,3+4\operatorname{sen} t)$
   (5) $\gamma(t)=(\frac{1}{2},1-t)$
   (6) $\gamma(t)=(e^t\cos t,e^t\operatorname{sen} t)$, $t\ge 0$
   (7) $\gamma(t)=(\sec t,\tan t)$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$
   (8) $\gamma(t)=(\sqrt{2}\cos t,2\operatorname{sen} t)$
   (9) $\gamma(t)=(\ln t,\sqrt{t})$, $t\ge 1$
   (10) $\gamma(t)=(\cosh t,\sinh t)$, $t\in\mathbb{R}$
   (11) $\gamma(t)=(1+\cos t,2\cos t-1)$, $0\le t\le 2\pi$
   (12) $\gamma(t)=(1-t^2,2t^3+1)$, $t\in\mathbb{R}$
   (13) $\gamma(t)=(t(t^2-3),3(t^2-3))$
   (14) $\gamma(t)=(t^3-3t^2,t^3-3t)$
   (15) $\gamma(t)=(t^4-2t^3-2t^2,t^3-3t)$
   (16) $\gamma(t)=(2t^3-3t^2,t^3-12t)$
   (17) $\gamma(t)=(\ln(1+t^2),t^3-3t)$
   (18) $\gamma(t)=(t(t^4-1),t^4-1)$
   (19) $\gamma(t)=(t^2-2t,t^3-3t+1)$
   (20) $\gamma(t)=(\ln t,\sqrt[3]{t})$, $t>0$
   (21) $\gamma(t)=\left(\dfrac{3t}{1+t^3},\dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$
   (22) $\gamma(t)=\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$
   (23) $\gamma(t)=(t^3-12t,t^2-2t)$
   (24) $\gamma(t)=(2t-4t^3,3t^4-t^2)$
   (25) $\gamma(t)=(\operatorname{sen}2t,\cos t)$
   (26) $\gamma(t)=(2\operatorname{cotg} t,2\operatorname{sen}^2 t)$
   (27) $\gamma(t)=(2\operatorname{sen}^2 t,2\operatorname{sen}^2\tan t)$, $|t|<\pi/2$
   (28) $\gamma(t)=(e^t,t^2)$
   (29) $\gamma(t)=(\cos^3 t,\operatorname{sen}^3 t)$
   (30) $\gamma(t)=(t^{31}+\cos t,2014-t^{31}-\cos t)$

9. Encontre equações paramétricas para as curvas definidas pelas equações abaixo:

   (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$ (2) $3(x-1)^2+5(y+2)^2=15$ (3) $y^2-4y+3-x=0$

   (4) $x^3+y^3=6xy$ (Folium de Descartes) (5) $y^2=x^3$ (6) $y^2=x^3+x^2$

   (7) $(x^2+y^2)^2=xy$ (Lemniscata de Bernoulli) (8) $x^8+y^8=x+y$ (9) $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

10. Esboce as seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $r = 1$ | (2) $\theta = \pi/3$ | (3) $r = \cos\theta$ | (4) $r = \cos 2\theta$ |
| (5) $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ | (6) $r = \cos 3\theta$ | (7) $r = 2\lvert\operatorname{sen}\theta\rvert$ | (8) $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ |
| (9) $r = \theta$ | (10) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ | (11) $r = \ln\theta$ | (12) $r = \operatorname{cossec}\theta$ |
| (13) $r = \sec\theta$ | (14) $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ | (15) $r = 1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ | (16) $r^2\theta = 1$ |

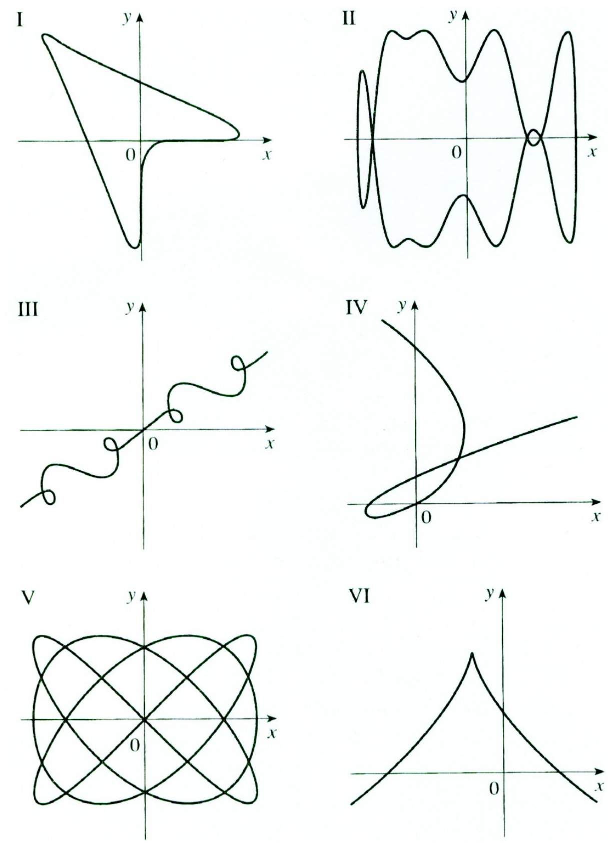
11. Encontre equações polares e faça um esboço das as curvas dadas abaixo em equações cartesianas:

| | |
|---|---|
| (1) $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ | (2) $2x + 3y = 1$ |
| (3) $x^2 - y^2 = 1$ | (4) $x^2 + 2y^2 = 1$ |
| (5) $x^2 + y^2 = e^{2y/x}$ | (6) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ |
| (7) $y - x\tan((x^2 + y^2)^{-1/2}) = 0$ | (8) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ |
| (9) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ | (10) $xy = 4$ |
| (11) $x^2 + y^2 = 20x$ | (12) $x^2 + x = -y^2$ |
| (13) $y = x^3$ | (14) $y^2 = x^3$ |
| (15) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (Cardióide) | (16) $y^{2013} = x^{2014}$ |
| (17) $4x^2 = 81(x^2 + y^2)$ (Curva de Eudoxus) | (18) $y^2(2 - x) = x^3$ (Cissóide de Diocles) |
| (19) $(x - 1)^2(x^2 + y^2) = x^2$ (Conchóide de Nicomedes) | (20) $(x + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2$ (Pérola de Sluze) |
| (21) $4(x^2 + y^2 - x) = 27(x^2 + y^2)^2$ (Curva de Cayley) | (22) $x^4 = x^2 - y^2$ (Figura Oito) |

12. Encontre pelo menos dois conjuntos distintos de equações paramétricas para representar cada uma das curvas do exercício anterior.

13. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

| | |
|---|---|
| (a) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 - t$ | (b) $x = t^3 - 1$, $y = 2 - t^2$ |
| (c) $x = \operatorname{sen}(3t)$, $y = \operatorname{sen}(4t)$ | (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t)$, $y = t + \operatorname{sen}(3t)$ |
| (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t)$, $y = \cos(t + \cos t)$ | (f) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$ |




14. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função $f$ é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de $f$.

15. Sejam $I$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se o traço de $\gamma$ está contido em uma circunferência então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

16. Calcule o comprimento das curvas abaixo:

    ① $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)\ ,\ t \in [-4, 4]$;

    ② $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)\ ,\ t \in [0, \pi]$;

    ③ $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)\ ,\ t \in [0, \pi]$.

17. Encontre o comprimento de um arco da ciclóide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ (Dica: Use a identidade $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$).

18. Mostre que o comprimento da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$, $a > b > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta\,,$$

    onde $\varepsilon = c/a$ é a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

19. Esboce a astróide $x = a\cos^3\theta$, $y = b\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$, e calcule seu comprimento.

20. Calcule a área limitada por cada uma das curvas abaixo:

(1) $r = \cos 2\theta$ (2) $r = 3\cos\theta$ (3) $r = 3(1+\cos\theta)$ (4) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

(5) $r = 2 - \operatorname{sen}(2\theta)$ (6) $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ (7) $r = 2\cos\theta - \sec\theta$ (8) $r = \theta^2$

21. Encontre a área da região delimitada pelas curvas abaixo:

(1) $r = \sqrt{3}\cos\theta,\ r = \operatorname{sen}\theta$ (2) $r = 2\cos\theta,\ r = 1$ (3) $r = 1+\cos\theta,\ r = 1-\cos\theta$

(4) $r = \operatorname{sen}2\theta,\ r = \cos 2\theta$ (5) $r = 3\cos\theta,\ r = 2-\cos\theta$ (6) $r = 3\operatorname{sen}\theta,\ r = 2\operatorname{sen}\theta$

(7) $r^2 = \operatorname{sen}2\theta,\ r^2 = \cos 2\theta$ (8) $r = 4\operatorname{sen}\theta,\ r = 2$ (9) $r = \operatorname{sen}\theta,\ r = \operatorname{sen}2\theta$

22. Encontre as equações das retas tangentes à curva paramétrica $x(t) = 3t^2+1,\ y(t) = 2t^3+1$ que passam pelo ponto $(4,3)$.

23. Seja $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular *parametrizada pelo comprimento de arco s*. O *vetor normal* a $\gamma$ no ponto $\gamma(t)$ é definido por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $a < s < b$.

① Mostre que os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$ são perpendiculares para qualquer $s \in (a,b)$.

② Mostre que existe uma função $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$, para $a < s < b$. O valor $\kappa(s)$ é chamado *curvatura* de $\gamma$ em $\gamma(s)$. Mostre que $\kappa = x'y'' - x''y'$, onde $'$ denota a derivada em relação a $s$.

③ Considere o ângulo $\theta(s)$ formado pelo eixo $x$ e pela reta tangente a $\gamma$ em $\gamma(s)$, i.e., $\tan\theta(s) = y'(s)/x'(s)$. Mostre que $\kappa(s) = \theta'(s)$ para cada $s \in (a,b)$ e interprete geometricamente o que significa o sinal da curvatura de $\gamma$.

④ Seja $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular qualquer com $\alpha(t) = (p(t), q(t))$, $a < t < b$, $s$ o parâmetro de comprimento de arco e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, a reparametrização de $\alpha$ por comprimento de arco. Como $\beta$ é parametrizada por comprimento de arco, a curvatura $\kappa$ de $\beta$ é bem-definida. Mostre que

$$\kappa = \frac{p'q'' - p''q'}{(p'^2 + q'^2)^{3/2}}$$

O valor desta função em $s = s(t)$ é chamado de *curvatura* de $\alpha$ em $\alpha(t)$.

⑤ Mantendo a notação do ítem anterior, admitindo que $\alpha$ seja o gráfico de uma função $y = f(t)$, mostre que a curvatura é dada por $\kappa = \dfrac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$.

⑥ Calcule a curvatura da *espiral logarítmica* $\alpha(t) = (e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

### ☆ Curvas notáveis

24. A *clotóide* (também chamada de *espiral de Euler* e *espiral de Cornu*) é uma curva $\gamma$ com a seguinte propriedade: para cada ponto $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ da curva, o ângulo $\varphi(s) = \arctan(y'(s)/x'(s))$ formado pelo vetor tangente em $\gamma(s)$ e o eixo $x$ tem crescimento linear, i.e.,

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2a^2 s.$$

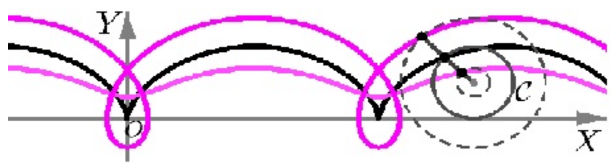
O valor $a$ é uma constante positiva e o termo 2 foi inserido para deixar a resposta final mais comportada.

(a) Assumindo que $\gamma(0) = (0,0)$ e que a tangente em $\gamma(0)$ seja horizontal, mostre que $\varphi(s) = (as)^2$.

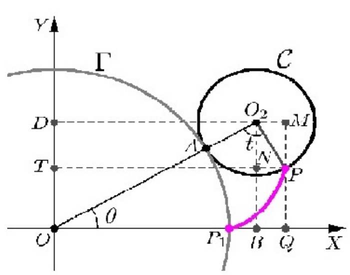
(b) Mostre que $x(s) = \int_0^s \cos((au)^2)\,du$ e $y(s) = \int_0^s \operatorname{sen}((au)^2)\,du$. Estas integrais são chamadas de *integrais de Fresnel* e são muito importantes em aplicações físicas, por exemplo, em teoria de difração.[2] A clotóide é uma curva especialmente utilizada em construções de estradas e *loops* tipo montanha-russa por limitar a força da gravidade. A curvatura ao longo da clotóide cresce linearmente com o comprimento de arco.

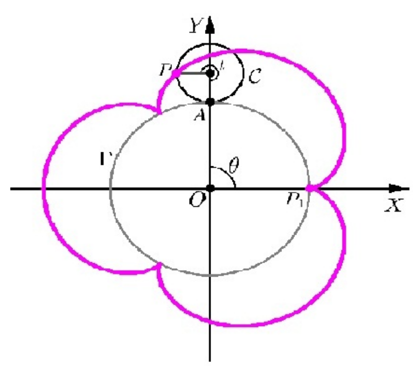
(c) Esboce o traço da clotóide.

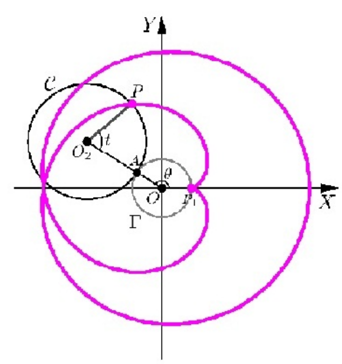
25. **(Trocóide)** Consideremos a circunferência $C$ de centro $(0,r)$ e raio $r>0$, a semi-reta $s=\{(x,y): y \geq 0\}$ e um ponto $P=(0,R)$, $R>0$, nessa semi-reta. Uma *trocóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola sobre o eixo $x$ sem deslizar. Note que a ciclóide é um caso particular de trocóide quando $P \in C$. Quando $P$ é exterior a $C$, a trocóide é chamada de *ciclóide longa*; quando $P$ é interior a $C$, a trocóide é chamada de *ciclóide curta*. Encontre equações paramétricas que descrevam a trocóide.




26. **(Epiciclóide)** Consideremos dois círculos $\Gamma$ e $C$ de raios $R>0$ e $r>0$, respectivamente, os quais se tocam exteriormente apenas em um ponto $P$. Admitamos também que $\Gamma$ seja centrado na origem e $C$ tenha centro no ponto $(R+r,0)$. Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola (sem deslizar) sobre $\Gamma$. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram os casos $r<R$ e $r>R$, respectivamente.




① Sejam $(x,y)$ as coordenadas do ponto $P$ na primeira figura. Mostre que $x = OB - QB$, $y = OD - DT$, $OB = (R+r)\cos\theta$ e $OD = (R+r)\operatorname{sen}\theta$.

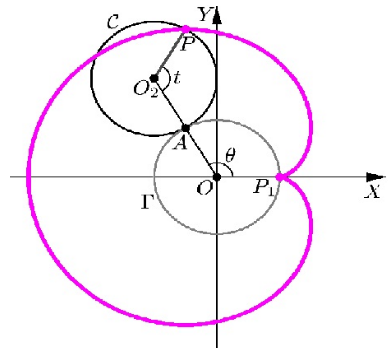
② Mostre que $QB = r\cos(\theta+t)$ e $DT = r\operatorname{sen}(\theta+t)$.

[2] Pelo amor de Deus, **NÃO** tente resolver estas integrais!

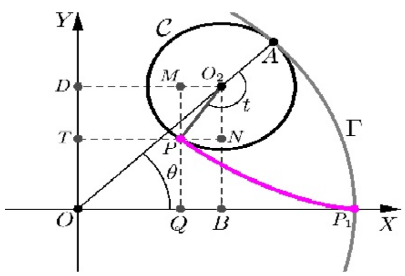
③ Mostre que $t = R\theta/r$ e conclua que as equações paramétricas da epiciclóide são

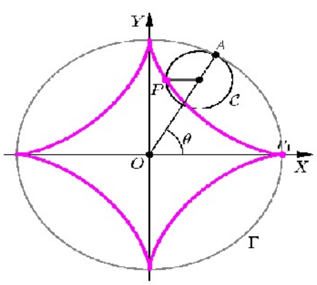
$$x = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R+r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right).$$

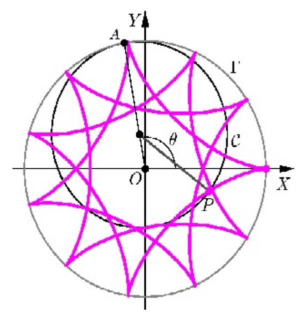
Quando $R = r$, a curva obtida é chamada de *cardióide*.




27. **(Hipociclóide)** Consideremos dois círculos $\Gamma$ e $C$ de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam *interiormente* apenas em um ponto $P$. Admitamos também que $\Gamma$ seja centrado na origem e $C$ tenha centro no ponto $(R+r, 0)$. Denominamos *hipociclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola (sem deslizar) sobre $\Gamma$. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram hipociclóides.




Usando raciocínios semelhantes àqueles utilizados no problema anterior, mostre que a hipociclóide tem equações paramétricas

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right).$$

A hipociclóide obtida com $r = R/4$ é chamada de *astróide*.

28. O *fólium de Descartes* é a curva $\gamma$ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

① Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, $\gamma$ é simétrica em relação à reta $y = x$.

② Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de $\gamma$.

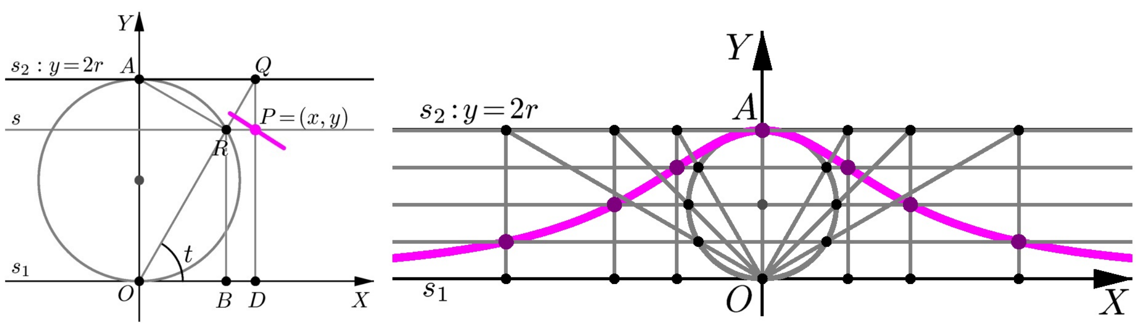
③ Faça um esboço de $\gamma$ .

29. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva $\gamma$ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

   ① Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação cartesiana $(x^2+y^2)^2 = xy$. Em particular, $\gamma$ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Faça um esboço de $\gamma$ .

30. **(Curva de Agnesi)** Seja $C$ um círculo de raio $r > 0$ tangente ao eixo $x$ e à reta $y = 2r$, onde $r > 0$ é fixado, conforme mostrado na primeira figura abaixo. Da origem, traçamos uma semi-reta em direção à reta $s_2$ e denotemos por $R$ e $Q$ os pontos de intersecção desta semi-reta com $C$ e $s_2$, respectivamente. O segmento $QD$ é perpendicular a $s_1$ e a reta $s$ é paralela a $s_1$. Consideremos também a reta $s$ paralela ao eixo $x$ passando por $R$ e $P$ o ponto de interseção da reta $s$ com o segmento $QD$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos traçando todas as semi-retas que partem de $O$ e intersectam $C$, descrevem a curva denominada *curva de Agnesi*, descrita na segunda figura abaixo.

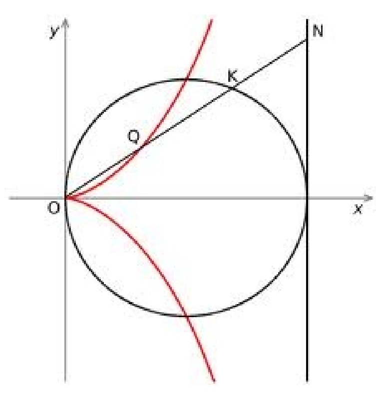



   ① Mostre que $x = OQ \cos t$ e $y = OR \operatorname{sen} t$.

   ② Mostre que $OQ = 2r/\operatorname{sen} t$ e $OR = 2r \operatorname{sen} t$.

   ③ Obtenha equações paramétricas para a curva de Agnesi.

31. **(Cissóide)** Seja $C$ o círculo de centro $(r, 0)$ e raio $r > 0$ e considere a reta $x = 2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta $s$ qualquer partindo da origem, sejam $K$ e $N$ os seus pontos de intersecção com $C$ e $s$, respectivamente. O ponto $Q$ sobre $s$ tem a propriedade que $OQ = KN$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam $s$ formam uma curva $\gamma$ chamada de *cissóide de Diocles*. O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo $\theta$ entre o segmento $ON$ e o eixo $x$.



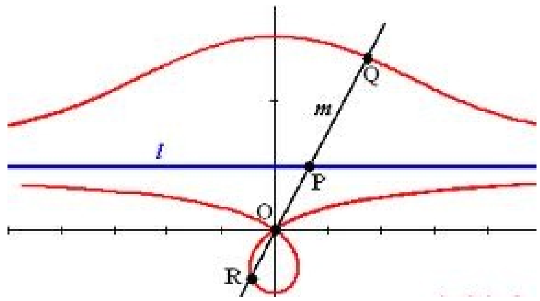
① Mostre que $OK = 2r\cos\theta$ e $ON = \dfrac{2r}{\cos\theta}$. Conclua que $KN = 2r\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$.

② Obtenha equações paramétricas para $\gamma$.

③ Mostre que a equação de $\gamma$ em coordenadas polares é $r = 2r\text{sen}\,\theta\tan\theta$.

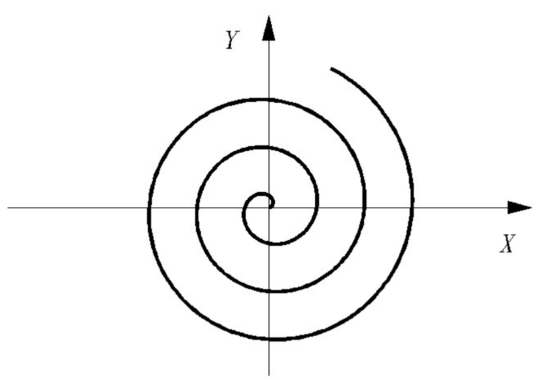
④ Mostre que $\gamma$ tem equação cartesiana $x^3 + (x-2r)y^2 = 0$.

32. Sejam $a, b > 0$ $r$ a reta horizontal $y = a$. Tracemos uma reta $s$ partindo da origem em direção à $r$ e chamemos de $P$ o ponto de intersecção de $s$ e $r$. Os pontos $Q$ e $R$ tais que as medidas dos segmentos $PQ$ e $PR$ são constantes iguais a $b$ formam uma curva chamada de *conchóide de Nicomedes.*




Usando o ângulo $\theta$ entre a reta $s$ e o eixo $x$ como parâmetro, mostre que $\gamma$ tem equações paramétricas $x = a\text{cotg}\,\theta + b\cos\theta$ e $y = a + b\text{sen}\,\theta$, $0 < |\theta| < \pi$.

33. A *espiral de Arquimedes* é a curva $\gamma$ descrita em coordenadas polares pela equação $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, onde $a > 0$ é fixo.




① Encontre equações paramétricas para as espirais de Arquimedes.

② Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação $x\tan(\sqrt{x^2+y^2}/a) = y$.

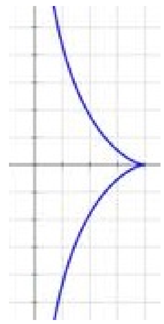
③ Mostre que a distância entre dois pontos de intersecção consecutivos de $\gamma$ com o eixo $x$ é constante igual a $2a\pi$.

34. **(Tractriz)** Seja $\gamma$ uma curva diferenciável contida no primeiro quadrante, $P$ um ponto de $\gamma$, $r$ a reta tangente à $\gamma$ em $P$. Admitindo que $r$ não seja vertical, seja $Q$ o ponto de intersecção entre $r$ e o eixo $y$. Suponha que o segmento $PQ$ tenha comprimento constante igual a $a > 0$.

① Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, mostre que $\gamma$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

② Resolva esta equação fazendo a substituição trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ e usando a relação trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2\tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)}$.

③ Mostre que $x(\theta) = a\cos\theta,\ y(\theta) = a\cos\theta + a\ln(\tan(\theta/2))$, $|\theta| < \pi/2$, é uma parametrização da curva $\gamma$. Esta curva é chamada de *tractriz* e seu traço é a figura abaixo.

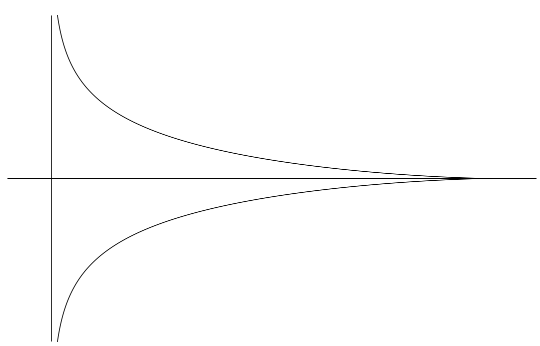


35. **(Tractriz - Ponto de vista dinâmico)** A *tractriz* é a curva do plano $xy$ que tem a propriedade que o segmento de reta tangente delimitado pelo ponto de tangência e o eixo $y$ tem comprimento constante. Esta curva admite a seguinte descrição mecânica: admita que uma partícula $P$ com certa massa é arrastada a partir de sua posição inicial sobre o eixo $x$ ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda $PQ$ de comprimento $a > 0$ mantida tensionada, de forma que a extremidade $Q$ esteja sobre o eixo $y$. Esta curva foi estudada primeiramente por James Bernoulli em 1691, tem aplicações mecânicas na construção de eixos e acústicas na construção de alto-falantes.[3]

    (a) Nestas condições, mostre que o menor ângulo formado pelo segmento $PQ$ e o eixo $x$ tem tangente igual a $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. Conclua que, se o gráfico de $y = y(x)$ descreve a trajetória da particula no primeiro quadrante, então

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

    (b) Determine a solução para esta última equação. Certifique-se de que os gráficos de $y$ e $-y$ descrevem a figura abaixo.



[3] A superfície obtida por rotação desta curva em torno do eixo $y$ é a superfície chamada de *pseudo-esfera*. Esta superfície tem curvatura gaussiana constante negativa e é um modelo para a geometria de Lobatchevski.

36. **(A braquistócrona)** Em 1696, Johann Bernoulli propõe o seguinte problema: determinar a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Note que o problema não é determinar o caminho mais curto e sim a trajetória percorrida em menor tempo. A curva determinada pela trajetória da partícula é denominada *braquistócrona*, palavra derivada do grego *brakhisto* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema foi resolvido em 1697 por Jacob Bernoulli, Leibniz, L'Hospital e Newton e tem grande importância na história da matemática.

    (a) A velocidade da partícula pode ser obtida igualando-se a energia cinética e a energia potencial, i.e., $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, onde $m$ é a massa da partícula e $g$ a constante gravitacional. Conclua que $v = \sqrt{2gy}$.

    (b) O *Princípio de Fermat* diz que a trajetória que minimiza tempo entre dois pontos é a da luz, logo, se $\theta$ é o ângulo entre a vertical e a trajetória, então $\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_m}$, com $v_m$ constante. Isso implica que a trajetória mínima começa sempre com tangente vertical. Admitindo que a partícula parta da origem e atinja seu ponto mínimo em um ponto de ordenada $-D$, com $D > 0$, temos $v_m = \sqrt{2gD}$.

    (c) Usando o fato que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, conclua que $v_m^2 dx^2 = v^2 ds^2 = v^2(dx^2 + dy^2)$ e $dx = \frac{v\,dy}{v_m^2 - v^2}$. Mostre que

    $$dx = \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy,$$

    e conclua que $y' = \sqrt{\frac{D-y}{y}}$. A equação acima implica que $x = \int \sqrt{\frac{y}{D-y}}\,dy$.

    (d) Faça a mudança de variável $y = \frac{D}{2}(1-\cos\theta) = D\operatorname{sen}^2(\theta/2)$, determine uma parametrização para o gráfico da solução da equação obtida no ítem anterior e esboce esta solução. A curva solução do problema também é chamada de *ciclóide*.

37. **(A tautócrona)** Em 1659, o físico holandês Christian Huygens propõe o seguinte problema: determinar uma curva plana na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida. Este problema é chamado de *problema da tautócrona* ou *isócrona*, do do grego *tautos* (mesmo), *chronos* (tempo).

    (a) Como no primeiro ítem do exercício anterior, se $s = s(t)$ é o comprimento de arco da curva, então sua altura $y$ deve ser proporcional à velocidade da partícula, i.e., $y(s) = s^2$, escolhendo unidade de medida adequadas. Logo, $y(s) = s^2$. Disso, $dy = 2s\,ds$ e $dy^2 = 4s^2 ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$, logo, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}$, portanto,

    $$x = \int \frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}\,dy.$$

(b) Faça $u=\sqrt{y}$ e mostre que $x=\dfrac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2}+\dfrac{1}{4}\arcsin(2u)$ e $y=u^2$. Fazendo $\theta=\arcsin(2u)$, conclua que

$$x(\theta)=\frac{1}{8}\left(2\theta+\operatorname{sen}(2\theta)\right),\ y(\theta)=1-\cos(2\theta)$$

é uma parametrização para a curva solução do problema. Observe que, a menos de parametrização, a solução do problema da tautócrona também é uma ciclóide.

## ✰ Respostas

**(1)**
(1) $p_n(x)=1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$;
(2) $p_n(x)=e+e(x-1)+e(x-1)^2/2!+\ldots+e(x-1)^n/n!$;
(3) $p_{2k+1}(x)=x-x^3/3!+(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(4) $p_{2k}(x)=1-x^2/2!+(-1)^k x^{2k}/(2k)!$;
(5) $p_n(x)=\cos 1-\operatorname{sen}1(x-1)+\cos 1(x-1)^2/2!-\operatorname{sen}1(x-1)^3/3!+\ldots+f^{(n)}(1)(x-1)^n/n!$;
(6) $p_{2k+1}(x)=x-x^3/3+x^5/5+\ldots+(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$;
(7) $p_n(x)=x-x^2/2+x^3/3-\ldots+(-1)^n x^n/n$;
(8) $p_{2k+1}(x)=2x+2x^3/3+\ldots+2x^{2k+1}/(2k+1)$;
(9) $p_n(x)=p_3(x)=1+2(x-1)+5(x-1)^2+(x-1)^3$ para todo $n\geq 3$;
(10) $p_{2k+1}(x)=x+x^3/3!+\ldots+x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(11) $p_{2k}(x)=1+x^2/2!+\ldots+x^{2k}/(2k)!$;
(12) $p_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$;
(13) $p_{2k}(x)=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^k x^{2k}$;
(14) $p_{n+1}(x)=x^2-x^3/2+x^4/3-\ldots+(-1)^n x^{n+1}/n$;
(15) $p_{2k}(x)=1+x+\ldots+2^{2k-1}x^{2k}/(2k)!$

**(11)** ① $r=a$; ② $r=1/(2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta)$;
③ $r=1/\sqrt{\cos(2\theta)}$; ④ $r=1/\sqrt{\cos^2\theta+2\operatorname{sen}^2\theta}$; ⑤ $r=e^\theta$; ⑥ $r=(\cos^{2/3}\theta+\operatorname{sen}^{2/3}\theta)^{-3/2}$; ⑦ $r=1/\theta$;
⑧ $r=2|\operatorname{sen}(2\theta)|$; **(13)** (a)-IV, (b)-VI, (c)-V, (d)-III, (e)-I, (f)-II; **(7)** Não; $\gamma(t)=(t^3,t^2)$; **(16)** ① $64\sqrt{5}$,
② $\sqrt{2}$, ③ $\pi^2/2$; **(10)** $8r$;
**(12)** $6a(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$;

**(20)** (1) $\pi/2$; (2) $9\pi/4$;

**(18)** $x(\theta)=r\theta+(R-r)\operatorname{sen}\theta$ e $y(\theta)=r\theta+(R-r)\cos\theta$;
**(15)** $t=1$: $x-y-1=0$ e $t=-2$: $2x+y-11=0$;

**(25)** $x=rt-R\operatorname{sen}t$ e $y=r-R\cos t$; **(23)** ③ $x=2r\operatorname{cotg}\theta$ e $y=2r\operatorname{sen}^2\theta$;

**(31)** ② $x=2r\operatorname{sen}^2\theta$ e $y=2r\left(\tan\theta-\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)$;

**(33)** ① $x=a\theta\cos\theta$ e $y=a\theta\operatorname{sen}\theta$;